

LEITFADEN  
DER  
EBENEN GEOMETRIE,

MIT BENUTZUNG  
NEUERER ANSCHAUUNGSWEISEN FÜR DIE SCHULE

BEARBEITET VON  
**DR. HUBERT MÜLLER,**  
OBERLEHRER AM KAISERLICHEN LYCEUM IN METZ,  
FRÜHER AUSSERORDENTL. PROFESSOR DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT  
DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. B.

IN ZWEI THEILEN:

- I. DIE GERADLINIGEN FIGUREN UND DER KREIS.  
II. DIE KEGELSCHNITTE UND DIE ELEMENTE DER NEUEREN GEOMETRIE.

---

ERSTER THEIL

DIE GERADLINIGEN FIGUREN UND DER KREIS.



LEIPZIG.  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1874.







## Vorwort.

---

Es ist schon vielfach bemerkt worden, dass die Geometrie der Alten, sowohl in Bezug auf die Einheit des Systemes als in Bezug auf die Anregung und Bildung der Vorstellungskraft weit hinter der Geometrie der Lage, die auch als neuere Geometrie bezeichnet wird, zurücksteht.

Der hieraus entsprungene Wunsch, Theile aus der Geometrie der Lage für die Schule zu verwenden, hat mehreren schätzenswerthen Werken über das Grenzgebiet der alten und neuern Geometrie die Entstehung gegeben und ist die Veranlassung davon, dass in vielen Schulbüchern die der neuern Geometrie verwandten Theile mit Vorliebe behandelt werden. Der auf diese Weise gewonnene Einfluss dieser Disciplin auf die Schule kommt jedoch nicht allen Anstalten zu Gute, weil vielfach die Zeit fehlt, um sich in den betreffenden Kapiteln mit Musse umzusehen. Ich habe nun in dieser Arbeit von Anfang an versucht, so viel es mir möglich schien, Anschauungsweisen, welche der Geometrie der Lage entnommen sind, in den Lehrstoff einzuflechten.\*)

Der sachverständige Leser wird beurtheilen, ob dies in befriedigender Weise geschehen ist.

Der Inhalt des vorliegenden Leitfadens ist dem Pensum der Mittel- und Gelehrtenschulen entsprechend. Die der neuern Geometrie verwandten Abschnitte über Congruenz der Figuren, Transversalen im Dreieck, Potenzlinien von

---

\*) Anmerkung. Dualistisch zugeordnete Sätze, aber auch solche Sätze, die in irgend einem andern Gegensatze stehen, sind vielfach in dem Buche neben einander gestellt worden.



Kreisen, Pol und Polare, Aehnlichkeit der Figuren, Kreisberührungen sind soweit, aber auch nur soweit behandelt, als es nöthig schien um die eigene Production des Schülers in Lösung von Aufgaben zu ermöglichen.

Die Sternchen, welche einer grossen Anzahl von Paragraphenzeichen beigelegt sind, bezeichnen die grösstmögliche Anzahl von Auslassungen, welche bei geringerer Stundenzahl gemacht werden können ohne den Zusammenhang des übrigen Stoffes zu stören. Für die Einübung der Anschauungen und Sätze, welche der Schüler sich angeeignet hat, ist durch eingestreute Fundamental-Aufgaben und die in besonderen Paragraphen zusammengestellten Uebungen gesorgt. Hiermit ist jedoch nicht gesagt, dass diese Uebungen dazu bestimmt sind, eine systematisch geordnete Aufgabensammlung zu ersetzen.

Einige Gegenstände sind zu einem Anhange des zweiten Cursus zusammengefasst, um anzudeuten, dass dieselben als Uebungen aufgefasst, das heisst, den Schülern stückweise vorgeführt werden können. Wo dem Lehrer eine Stunde für gebundenes Zeichnen gegeben ist, würden die mit Sternchen bezeichneten Paragraphen des Anhanges in Verbindung mit den beigegebenen Aufgaben in dieser Stunde den besten Platz finden.

Die Berechnung des Kreises wird allgemein zuletzt behandelt. Hier kann dieselbe noch vor der Aehnlichkeit der Dreiecke durchgenommen werden und hat auch daselbst ihre Stelle erhalten. Es ist nützlich, zu bemerken, dass auch andere Abschnitte ohne grosse Schwierigkeit in ihrer Anordnung verschiebbar sind, was manchmal bei combinirten Classen von Vortheil sein kann.

Die Darstellung ist möglichst kurz. Die Beweise sind meistens durch Citate, oder durch kurze Andeutungen gegeben und nur ausnahmsweise aus besonderen Gründen ausführlicher entwickelt, z. B. wenn es sich um Darlegung eines reciproken Gegensatzes zweier Beweise handelte.

Den Elementen der Mathematik von Baltzer bin ich darin gefolgt, dass ich den Sinn congruenter und ähnlicher



Figuren in die Betrachtung einführe und den Abschnitten über Congruenz und Aehnlichkeit der Figuren eine grössere Ausdehnung gebe. Obgleich dies hier in anderer Weise geschehen ist, wie es schon der Charakter des vorliegenden Buches als eines Leitfadens mit sich bringt, so erwähne ich doch das bekannte Werk der Anregung halber, welche ich durch dasselbe in dieser Richtung erhielt. In den Betrachtungen über symmetrische Figuren und über die Berührung von Kreisen bin ich im Wesentlichen dem Gange gefolgt, welchen das für den Unterricht so werthvolle Werkchen von Christoph Paulus: *Zeichnende Geometrie*, Stuttgart 1866, einschlägt. Jedoch ist auch hier die Entwicklung im Einzelnen eine selbstständige.

Indem ich nun dieses Schulbuch der Beurtheilung meiner Fachcollegen übergebe, kann ich nicht umhin eines Gutachtens Erwähnung zu thun, mit welchem mich mein unvergesslicher Lehrer, der in Göttingen verstorbene Professor Dr. Alfred Clebsch zur Herausgabe der Arbeit aufmunterte. Derselbe sprach sich dahin aus, dass eine Umbildung vieler Theile der in den Schulen gelehrtten Geometrie an der Hand der neuern Geometrie ein Bedürfniss der Zeit sei, dass er vorliegenden Leitfaden als eine willkommene Gabe für die Schule betrachte und das Erscheinen desselben in Tendenz und Inhalt freudig begrüßen würde. Ich wünsche, dass die Ansicht eines wissenschaftlich so hoch stehenden Mannes eine gute Vorbedeutung für den Erfolg des Büchleins sein möge.

Metz, im März 1874.

Dr. H. Müller.







# Inhaltsverzeichnis.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Seite. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| § 1. Einleitung . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 1      |
| <b>Erster Cursus.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |
| <b>Von den ebenen Figuren im Allgemeinen.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |        |
| I. Abschnitt. Der Punkt, die Gerade und der Kreis . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 2      |
| § 2. Lagen von Punkten und Geraden. — 3. Winkel und Strecken. — 4. Messen der Strecken. — 5. Der Kreis. — 6. Messungen von Bogen und Winkeln. — 7. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.                                                                                                                                                                                                                                                                               |        |
| II. Abschnitt. Von den Parallel-Linien . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 7      |
| § 8. Erklärungen. — 9. Sätze über die Parallel-Linien. — 10. Fortsetzung.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |        |
| III. Abschnitt. Von den Winkeln geradliniger Figuren                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 11     |
| § 11. Erklärungen. — 12. Sätze über die Winkel des Dreiecks. — 13. Sätze über die Winkel der Vielecke. — 14. Fortsetzung. — 15. Uebungen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |        |
| <b>Zweiter Cursus.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |        |
| <b>Von der Congruenz und ihrer Anwendung auf die Untersuchung ebener Figuren.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |        |
| I. Abschnitt. Die Congruenz der Dreiecke und Anwendungen derselben . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 15     |
| § 16. Erklärungen. — Lagen congruenter Dreiecke gegen einander. — 17. Erster und zweiter Fall der Congruenz. — 18. Das gleichschenklige Dreieck. — 19. Aufgaben. — 20. Ungleichungen über Seiten oder Winkel des Dreiecks. — 21. Dritter und vierter Fall der Congruenz. — 22. Aufgaben. — 23. Der geometrische Ort. — 24. Uebungen.                                                                                                                             |        |
| II. Abschnitt. Von den Parallelogrammen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 28     |
| § 25. Lehrsätze über die Parallelogramme. — 26. Aufgaben. — 27. Lehrsätze über die besonderen Parallelogramme. — 28. Anwendungen. — 29. Uebungen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |        |
| III. Abschnitt. Der Kreis und die regelmässigen Vielecke . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 34     |
| § 30. Punkte und Tangenten des Kreises. — 31. Sehnen und Tangentenwinkel. — 32. Fortsetzung. — 33. Geometrische Oerter. — Aufgaben. — 34. Kreise, welche sich schneiden oder berühren. — 35. Fortsetzung. Aufgaben. — 36. Beziehungen zwischen Winkeln, deren Schenkel einen Kreis treffen. — 37. Fortsetzung. Aufgaben. — 38. Sätze über ein- und umbeschriebene Vielecke. — 39. Sätze über regelmässige Vielecke. — 40. Fortsetzung. Aufgaben. — 41. Uebungen. |        |
| <b>Anhang zu dem zweiten Cursus.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |        |
| I. Abschnitt. Das Princip der Dualität. — Beziehungen zwischen Vielecken und Curven . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 49     |
| *§ 42. Das Princip der Dualität. — 43. Beziehungen zwischen Vielecken und Curven. — 44. Uebungen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |        |
| *II. Abschnitt. Congruenz der Figuren . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 54     |
| § 45. Lagen congruenter Figuren gegen einander. — 46. Bedingungen für die Congruenz geradliniger Figuren. — 47. Einaxig symmetrische Figuren. — 48. Centrisch symmetrische Figuren. — 49. Zweiaxig symmetrische Figuren. — 50. Uebungen.                                                                                                                                                                                                                         |        |



## Dritter Cursus.

## Von den Flächen geradliniger Figuren.

- I. Abschnitt. Gleichheit geradliniger Figuren . . . . . 60  
 § 51. Gleichheit von Parallelogrammen oder Dreiecken. — 52. Aufgaben über Theilung und Verwandlung von Figuren. — 53. Der Pythagoreische Lehrsatz. — Aufgaben. — 54. Uebungen.
- II. Abschnitt. Berechnung der Flächen geradliniger Figuren . . . . . 64  
 § 55. Fundamentalsatz. — 56. Berechnung der Flächen von Rechtecken, Parallelogrammen, Dreiecken u. s. w. — 57. Folgerungen. — 58. Verhältnisse von Flächen. — 59. Darstellung algebraischer Ausdrücke. — 60. Die Quadrate der Seiten schiefwinkliger Dreiecke. — 61. Uebungen.

## Vierter Cursus.

## Von der Proportionalität der Linien.

- I. Abschnitt. Durchschnitte eines Winkels mit Parallelen 71  
 \*§ 62. Bezeichnung der Länge und Richtung von Strecken. — 63. Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen. — 64. Aufgaben. — 65. Durchschnitt paralleler Geraden mit Strahlen eines Büschels. — 66. Anwendungen. — 67. Uebungen.
- \*II. Abschnitt. Harmonische Punkte. Transversalen des Dreiecks . . . . . 78  
 § 68. Harmonische Punkte. — 69. Die Halbierungslinien der Winkel und Ausenwinkel eines Dreiecks. — 70. Anwendungen. — 71. Involutionen. — 72. Transversalen des Dreiecks. Vollständiges 4-Eck. — 73. Uebungen.
- III. Abschnitt. Verhältniss der Peripherie des Kreises zum Durchmesser. Ausmessung des Kreises . . 88  
 § 74. Aufgaben zur Berechnung regelmässiger Vielecke. — 75. Die Peripherie als Grenzwert des Umrings regelmässiger Vielecke. — 76. Berechnung von  $\pi$ . — 77. Aufgaben zur Berechnung des Kreises. — 78. Uebungen.

## Fünfter Cursus.

## Von der Aehnlichkeit und ihrer Anwendung auf die Untersuchung ebener Figuren.

- I. Abschnitt. Aehnlichkeit der Dreiecke . . . . . 96  
 § 79. Definition ähnlicher Dreiecke. — 80. Bedingungen für die Aehnlichkeit von Dreiecken. — 81. Anwendungen. — 82. Anwendungen auf das rechtwinklige Dreieck. Aufgaben. — 83. Anwendungen auf die Kreislehre. — 84. Aufgaben. — 85. Uebungen.
- \*II. Abschnitt. Aehnlichkeit der Figuren . . . . . 106  
 § 86. Entstehung ähnlicher Figuren. — 87. Eigenschaften ähnlicher Figuren. — 88. Bestimmung ähnlicher Figuren durch Paare homologer Stücke. — 89. Uebungen.
- \*III. Abschnitt. Von den Potenzlinien . . . . . 111  
 § 90. Die Potenzlinie zweier Kreise. — 91. Die Potenzlinien dreier Kreise. Aufgaben. — 92. Der Büschel von Kreisen. — 93. Uebungen.
- \*IV. Abschnitt. Von den Kreispolaren . . . . . 116  
 § 94. Pol und Polare. — 95. Die Polaren der Punkte einer Geraden. — 96. Conjugirte Punkte. — 97. Lehrsätze über conjugirte Punkte. — 98. Sätze über Pole und Polaren. Aufgaben. — 99. Reciproke Figuren. — 100. Uebungen.
- \*V. Abschnitt. Kreise als ähnliche Figuren. — Kreisberührungen . . . . . 122  
 § 101. Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise. — 102. Aehnliche Systeme zweier Kreise. — 103. Aufgaben. — 104. Inverse Punkte. Aufgaben. — 105. Die Aehnlichkeitsachsen dreier Kreise. — 106. Sätze über Kreisberührungen. — 107. Aufgaben. — 108. Uebungen.



## Einleitung.

---

a) Wenn man einen Körper nur in Bezug auf den Raum, welchen er einnimmt und die Form seiner Begrenzung betrachtet, indem die Eigenschaft der ihn erfüllenden Materie unberücksichtigt bleibt, so kommt man zu dem Begriffe eines mathematischen Körpers.

b) Die Grenzen eines Körpers sind Flächen (Oberfläche des Körpers).

c) Die Grenzen eines Flächenstückes sind Linien (Kanten des Körpers).

d) Die Grenzen eines Linienstückes sind Punkte (Ecken des Körpers).

$\alpha$ ) Wenn man sich vorstellt, § 1. dass ein mathematischer Körper ( $a$ ) sich zusammenziehe, so dass der von ihm eingenommene Raum immer kleiner und kleiner wird, so nähert man sich dem Begriffe eines Punktes ( $d$ ). Derselbe zeigt einen Ort im Raume an.

$\beta$ ) Wenn ein Punkt ( $d$ ) in Bewegung gedacht wird, so beschreibt er eine Linie.

$\gamma$ ) Wenn eine Linie ( $c$ ) in Bewegung gedacht wird, so beschreibt sie eine Fläche.

$\delta$ ) Wenn eine Fläche ( $b$ ) in Bewegung gedacht wird, so beschreibt sie einen körperlichen Raum. ( $a$ )

Die einfachste Linie ist die Gerade. Durch zwei Punkte geht nur eine einzige Gerade (Axiom der Geraden). Die einfachste Fläche ist die Ebene. Eine Gerade, welche durch zwei Punkte einer Ebene geht, liegt in derselben (Axiom der Ebene).

Die ebene Geometrie oder Planimetrie betrachtet nur diejenigen räumlichen Gebilde, welche in einer Ebene enthalten sind.



## Erster Cursus.

### I. Abschnitt.

#### Der Punkt, die Gerade und der Kreis.

##### § 2. Lagen von Punkten und Geraden.

Der Punkt und die gerade Linie sind die Grundgebilde der Planimetrie. Die Eigenschaften derselben sind die Grundsätze dieser Wissenschaft und bedürfen keines Beweises.

a) Es gibt unendlich viele Gerade einer Ebene, welche durch einen Punkt derselben gehen.

Die Gesamtheit dieser Geraden bildet einen Strahlenbüschel. Der gegebene Punkt wird der Scheitel des Strahlenbüschels genannt.

b) Es gibt nur einen Punkt, welcher auf zwei Geraden zugleich liegt, nämlich der Schnittpunkt dieser Geraden.

$\alpha$ ) Es gibt unendlich viele Punkte, welche auf einer Geraden liegen.

Die Gesamtheit dieser Punkte bildet eine Punktreihe. Die gegebene Gerade wird der Träger dieser Punktreihe genannt.

$\beta$ ) Es gibt nur eine Gerade, welche durch zwei Punkte zugleich geht, die Verbindungsline dieser Punkte.

##### § 3. Winkel und Strecken.

a) Zwei Gerade, welche sich schneiden, theilen die Ebene in 4 Felder, welche Winkel genannt werden (Fig. 1). Der Schnittpunkt der Geraden ist der Scheitelpunkt der 4 Winkel.  $ma$  und  $mb$  (Fig. 2) sind die Schenkel des Winkels  $amb$  oder  $bma$ .

b) Ein Winkel wird als Mass für den Richtungsunterschied seiner Schenkel betrachtet oder als Mass für die Grösse der Drehung, welche einer seiner

$\alpha$ ) Zwei Punkte einer Geraden begrenzen ein Stück derselben, welches Strecke genannt wird (Fig. 3). Die Gerade, welche die beiden Punkte enthält, heisst der Träger der Strecke. Die Punkte  $a$  und  $b$  sind die Endpunkte der Strecke  $ab$  oder  $ba$ .

$\beta$ ) Eine Strecke wird als Mass für den Abstand ihrer Endpunkte betrachtet oder als Mass für den geradlinigen Weg, welchen der eine Punkt (An-



Schenkel (Anfangsschenkel) machen muss, um mit dem andern Schenkel (Endschenkel) zusammenzufallen. fangspunkt) zurücklegen muss, um mit dem andern (Endpunkt im engeren Sinne) zusammenzufallen.

c) Gleiche Winkel können so auf einander gelegt werden, dass sie sich decken. Dann  $\gamma$ ) Gleiche Strecken können so auf einander gelegt werden, dass sie sich decken. Dann

Fig. 1.

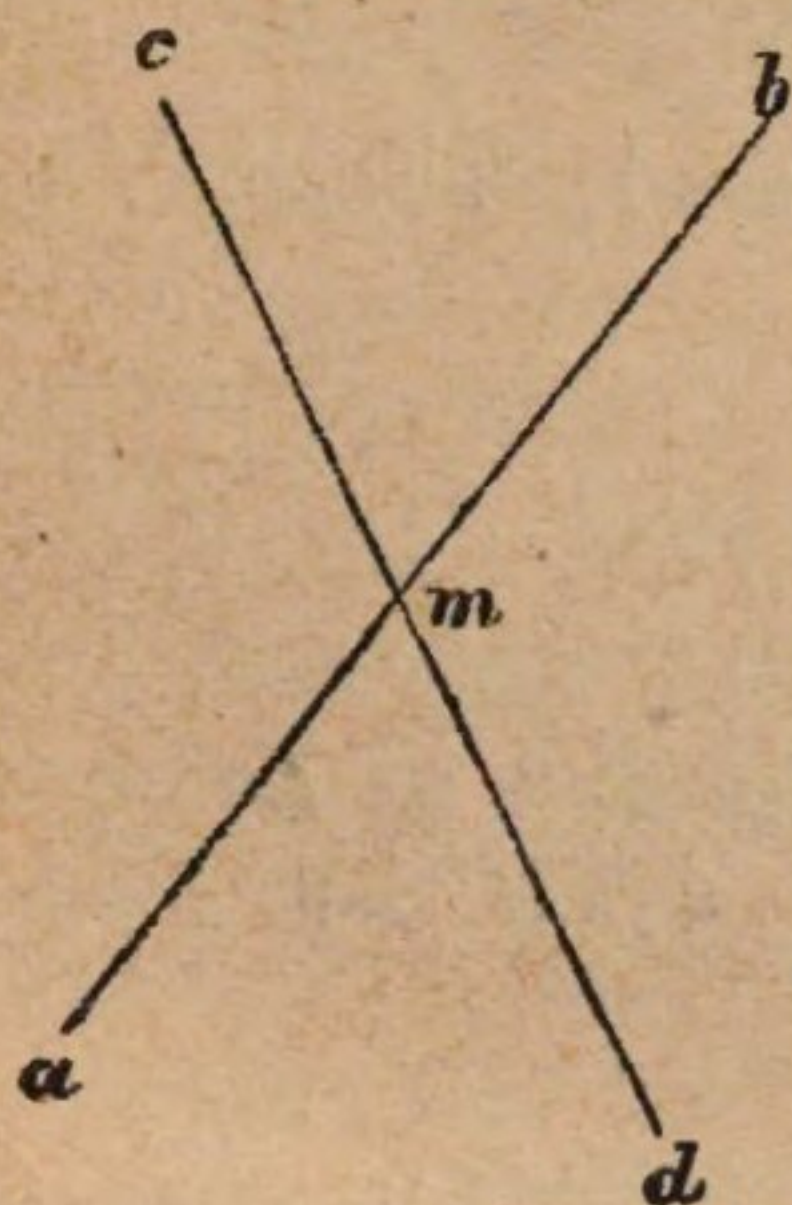


Fig. 2.

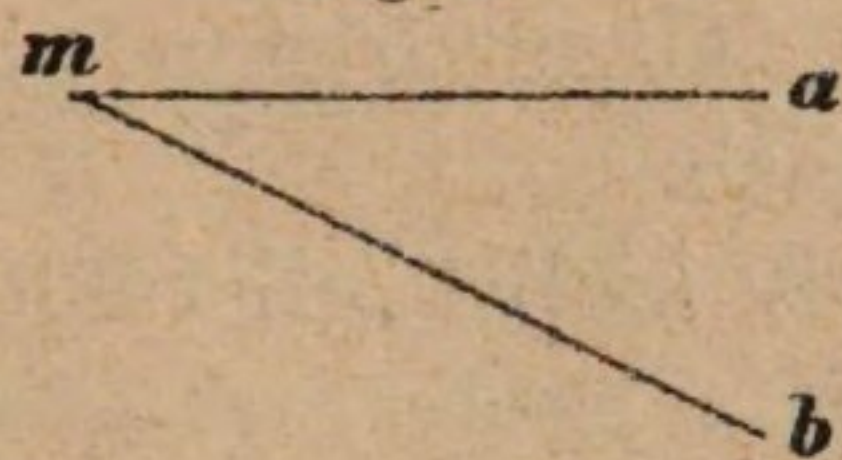


Fig. 3.

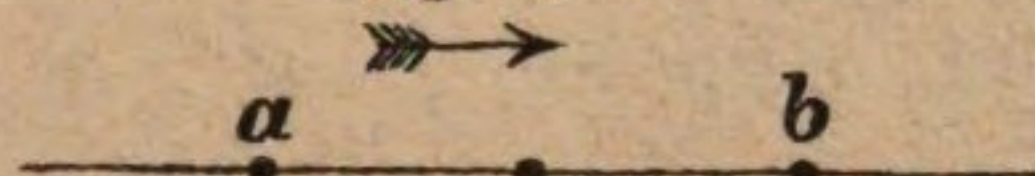
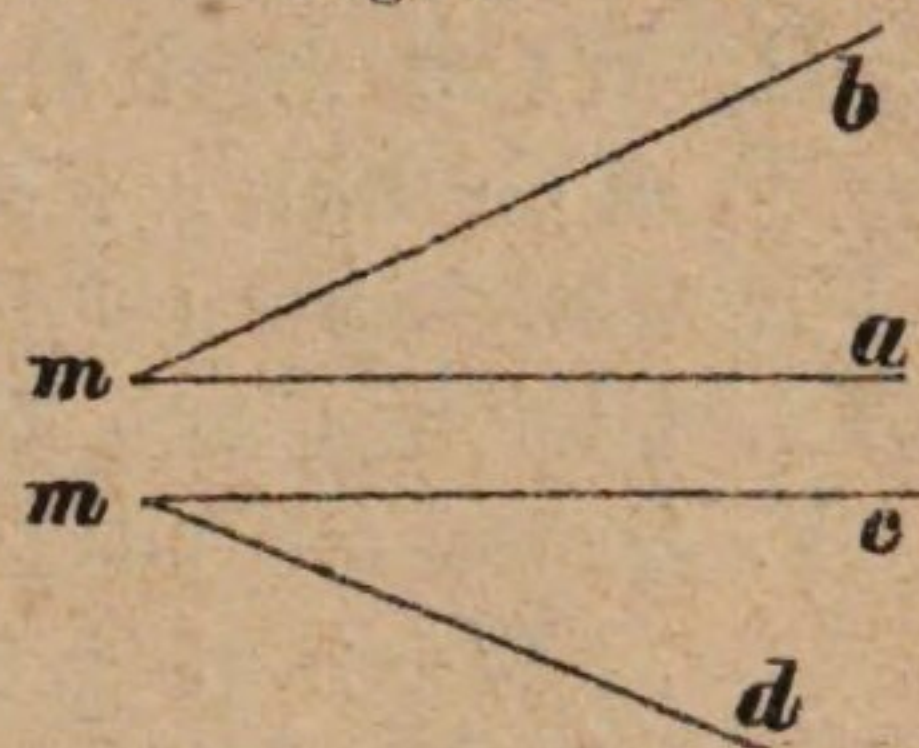


Fig. 4.



decken sich auch ihre Anfangsschenkel und ihre Endschenkel.

d) Wenn gleiche Winkel so auf einander gelegt werden, dass ihre Scheitel und Anfangsschenkel auf einander fallen, so decken sich auch ihre Endschenkel.

decken sich auch ihre Anfangspunkte und ihre Endpunkte.

e) Wenn gleiche Strecken so auf einander gelegt werden, dass ihre Anfangspunkte auf einander fallen, so decken sich auch ihre Endpunkte.

Anmerkung zu § 3. Man gebraucht die Schreibweise  $amb$  oder  $bma$ , je nachdem man  $ma$  oder  $mb$  als Anfangsschenkel des Winkels in Fig. 2 ansieht. Zwei Winkel heißen von einerlei Sinne, wenn die Anfangsschenkel beider Winkel sich in gleichem Sinne drehen müssen, um mit den Endschenkeln zusammenzufallen. Im andern Falle sind die Winkel von entgegengesetztem Sinne. Die Winkel  $amb$  und  $dmc$  in Fig. 4 sind gleichen Sinnes, dagegen die Winkel  $amb$  und  $cmd$  von entgegengesetztem Sinne.

#### Messen der Strecken.

§ 4.

Eine Strecke messen heisst zusehen, wie oft die Längeneinheit in derselben enthalten ist.

Anmerkung. Als Einheit des Längenmasses dient das Meter oder der Stab; dasselbe wird nach der Eintheilungszahl 10 in



Decimeter (dm), Centimeter oder Neuzoll (cm) und Millimeter oder Strich (mm) getheilt. Es ist also  $1^m = 10^{dm} = 100^{cm} = 1000^{mm}$ . Ferner ist 1 Kilometer (Km) = 10 Hektometer (Hm) = 100 Dekameter (Dm) = 1000 Meter. Als Wegmass gilt die Meile zu 7500 Metern.

Durch das Vergleichen und Messen finden die folgenden Grundsätze in der Geometrie ebensogut ihre Anwendung als in der Arithmetik.

- I. Wenn zwei Grössen einander gleich sind, so kann man die eine für die andere setzen.
- II. Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich.
- III. Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches.
- IV. Gleiches von Gleichem subtrahirt gibt Gleiches.
- V. Grösseres zu Grösserem addirt gibt Grösseres.

Wenn  $a$  grösser ist als  $b$ , so schreibt man dies in Zeichen  $a > b$ . Unter den Annahmen  $a > b$  und  $c > d$  ist auch:  $a + c > b + d$ .

- VI. Gleiches zu Grösserem addirt  
 „ von Grösserem subtrahirt } gibt Grösseres.

Wenn  $a > b$  und  $c = d$  ist, so ist auch  $a + c > b + d$  und  $a - c > b - c$ .

## § 5. Der Kreis.

- |                                                                                                      |                                                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) Wenn eine Strecke sich um einen ihrer Endpunkte dreht, so beschreibt sie eine Kreisfläche.</p> | <p>α) Wenn eine Strecke sich um einen ihrer Endpunkte dreht, so beschreibt der andere Endpunkt eine Kreislinie (einen Kreis).</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Die sich drehende Strecke heisst der Radius der Kreislinie oder Kreisfläche, der feste Endpunkt ist ihr Mittelpunkt.

- |                                                                                                                  |                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>b) Zwei Radien theilen die Kreisfläche in zwei Theile, welche Kreisausschnitte (Sectoren) genannt werden.</p> | <p>β) Zwei Punkte der Kreislinie theilen dieselbe in 2 Theile, welche Kreisbogen genannt werden.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|

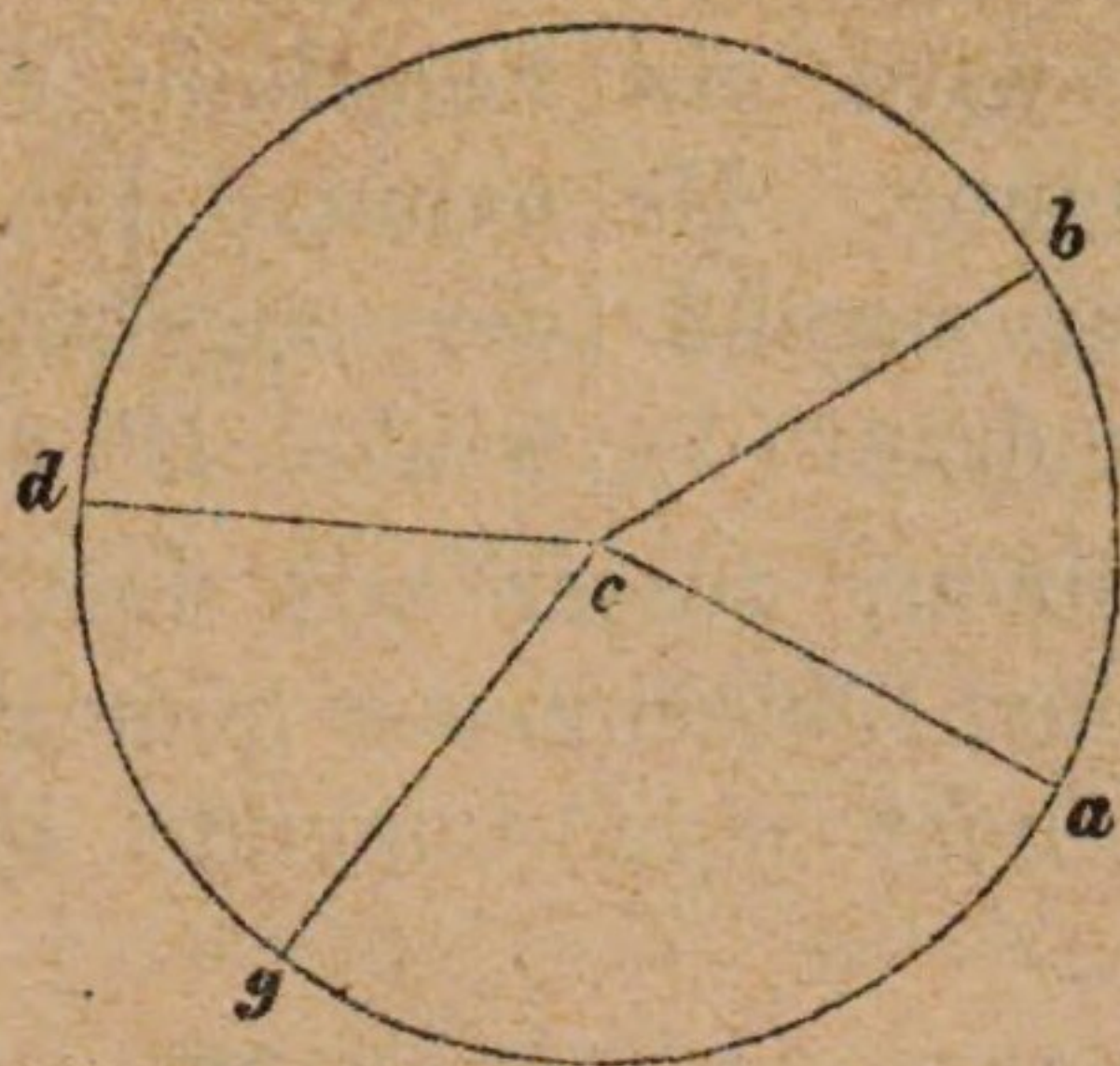
- |                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>c) Zwei Radien bilden die Schenkel zweier Winkel, welche Mittelpunktswinkel (Centriwinkel) heissen. Der kleinere dieser Winkel wird hohl (concav) genannt, der grössere erhaben (convex).</p> | <p>γ) Zwei Kreispunkte sind die Endpunkte einer Strecke, welche eine Sehne des Kreises heisst. Jede Sehne theilt die Kreisfläche in zwei Theile, welche Kreisabschnitte (Segmente) genannt werden.</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



d) Gleiche Mittelpunktswinkel ( $acb$  und  $gcd$ , Fig. 5) kann man so aufeinanderlegen, dass sie sich decken. Dann decken sich auch die zugehörigen Kreisbogen.

Zu gleichen Mittelpunkts-  
winkeln gehören gleiche Bogen.

Fig. 5.



δ) Gleiche Kreisbogen ( $ab$  u.  $gd$ , Fig. 5) kann man so aufeinander legen, dass sie sich decken. Dann decken sich auch die zugehörigen Mittelpunktswinkel.

Zu gleichen Bogen gehören  
gleiche Mittelpunktswinkel.

### Messungen von Bogen und Winkeln.

§ 6.

a) Zu einem Bogengrade ( $\alpha$ ) gehört ein Mittelpunktswinkel, welcher 360 mal in der Ebene enthalten ist (§ 5, δ). Derselbe heisst (Winkel-)Grad. Der Grad wird in 60 (Winkel-)Minuten und diese in 60 (Winkel-)Secunden getheilt.

b) Wenn eine Gerade sich um einen Punkt  $c$  dreht und dabei einen Winkel von  $m$  Winkelgraden beschreibt, so beschreibt jeder von  $c$  verschiedene Punkt dieser Geraden einen Kreisbogen von  $m$  Bogengraden.

c) Ein Durchmesser ( $\gamma$ ) enthält zwei entgegengesetzt gerichtete Radien. Dieselben sind die Schenkel zweier Mittelpunktswinkel von gleicher Grösse, welche gestreckte Winkel genannt werden. Ein gestreckter Winkel beträgt  $180^\circ$  und der zugehörige Bogen ist ein Halbkreis ( $\gamma$ ).

$\alpha$ ) Ein Bogen, welcher 360 mal in der Kreislinie enthalten ist, heisst (Bogen-)Grad ( $^\circ$ ). Ein Grad wird in 60 (Bogen-)Minuten ( $'$ ) und diese in 60 (Bogen-)Secunden ( $''$ ) getheilt.

$\beta$ ) Wenn ein Punkt einen Kreisbogen von  $m$  Bogengraden beschreibt, so beschreibt der zugehörige Radius einen Winkel von  $m$  Winkelgraden.

$\gamma$ ) Eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt des Kreises geht, heisst Durchmesser. Die Endpunkte eines Durchmessers theilen die Kreislinie in 2 gleiche Bogen, welche Halbkreise genannt werden. Ein Halbkreis beträgt  $180^\circ$  und der zugehörige Mittelpunktswinkel ist ein gestreckter ( $c$ ).



d) Die Hälfte eines gestreckten Winkels wird ein rechter Winkel genannt. Er beträgt  $90^\circ$  und der zugehörige Bogen ist ein Quadrant ( $\delta$ ).

δ) Der vierte Theil der Kreislinie wird Quadrant genannt. Er beträgt  $90^\circ$  und der zugehörige Mittelpunktswinkel ist ein Rechter ( $\delta$ ).

Kreisbogen können, ausser mit dem Gradmasse, noch mit dem gewöhnlichen Längenmasse gemessen werden. Nach der Regel de tri findet man folgende Reductionen beider Masse aufeinander.

e) Wenn die Länge der Kreislinie (Peripherie)  $p$  Meter beträgt, so misst der Bogen von  $\alpha$  Grad  $\frac{p \cdot \alpha}{360}$  Meter.

ε) Wenn die Länge der Peripherie  $p$  Meter beträgt, so enthält ein Bogen von  $a$  Meter  $\frac{a \cdot 360}{p}$  Grad.

## § 7. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

Erklärungen. a) Zwei Winkel heissen Nebenwinkel, wenn sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, während die andern Schenkel in entgegengesetzter Richtung liegen (Fig. 6). Der kleinere von zwei Nebenwinkeln heisst spitz, der grössere stumpf.

Lehrsätze. α) Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich einem gestreckten Winkel oder zwei Rechten ( $180^\circ$ ). Wenn zwei Nebenwinkel einander gleich sind, so ist jeder ein Rechter (§ 6 d). Ein spitzer Winkel ist kleiner, ein stumpfer ist grösser als ein rechter Winkel.

Fig. 6.

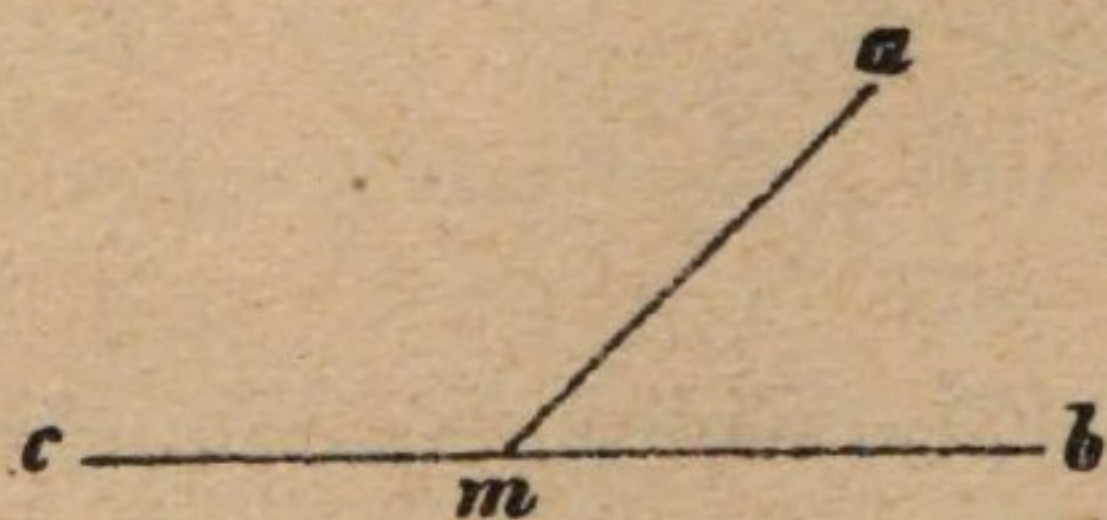
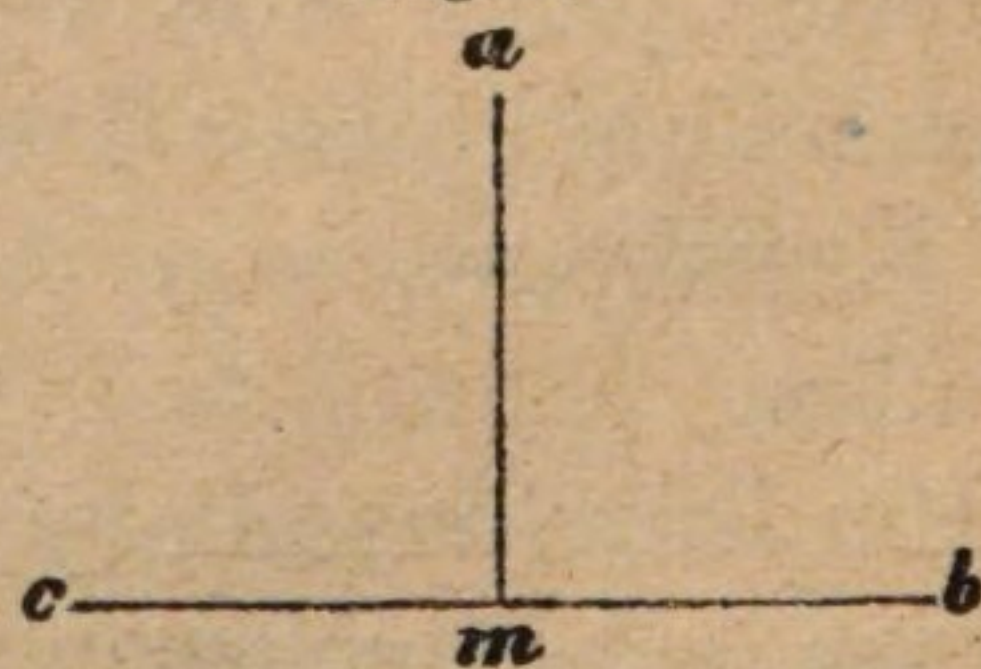


Fig. 7.



Der Beweis zu α folgt, so bald man sich den gemeinschaftlichen Winkelschenkel entfernt denkt, und § 6, c, d, anwendet.

b) Winkel, welche sich zu  $180^\circ$  ergänzen, heissen Supplementwinkel. Winkel, welche sich zu  $90^\circ$  ergänzen, heissen Complementwinkel.

β) Nebenwinkel sind immer Supplementwinkel. Supplementwinkel (Complementwinkel) von gleichen Winkeln sind ebenfalls gleich.



c) Wenn zwei Gerade sich unter rechten Winkeln schneiden, so sagt man, dass jede dieser Geraden senkrecht auf der andern stehe.

d) Zwei Winkel heißen Scheitelwinkel, wenn sie den Scheitel gemeinsam haben und ihre Schenkel paarweise in entgegengesetzte Richtung fallen.

γ) In einem Punkte  $m$  (Fig. 7) einer Geraden  $cb$  kann man nur eine einzige Senkrechte  $ma$  errichten.

δ) Scheitelwinkel sind einander gleich.

Scheitelwinkel von gleichen Winkeln sind ebenfalls gleich.

Beweis zu δ (Fig. 1). Die Winkel  $amd$  und  $cmb$  sind einander gleich, weil sie Nebenwinkel desselben Winkels  $dmb$  (oder auch  $amc$ ) sind (β). Der Zusatz folgt durch mehrmalige Anwendung von Grundsatz I.

Fig. 8.

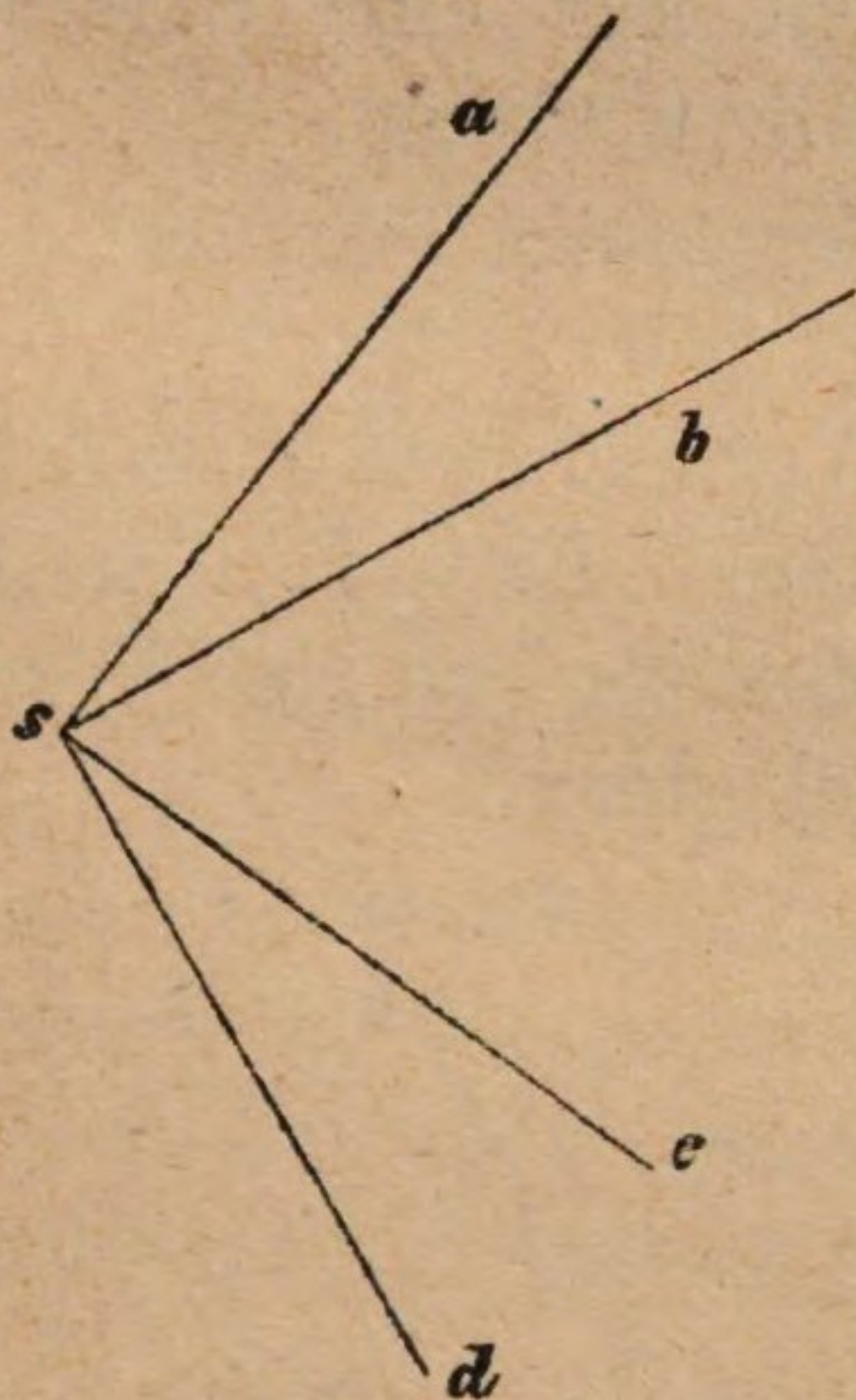
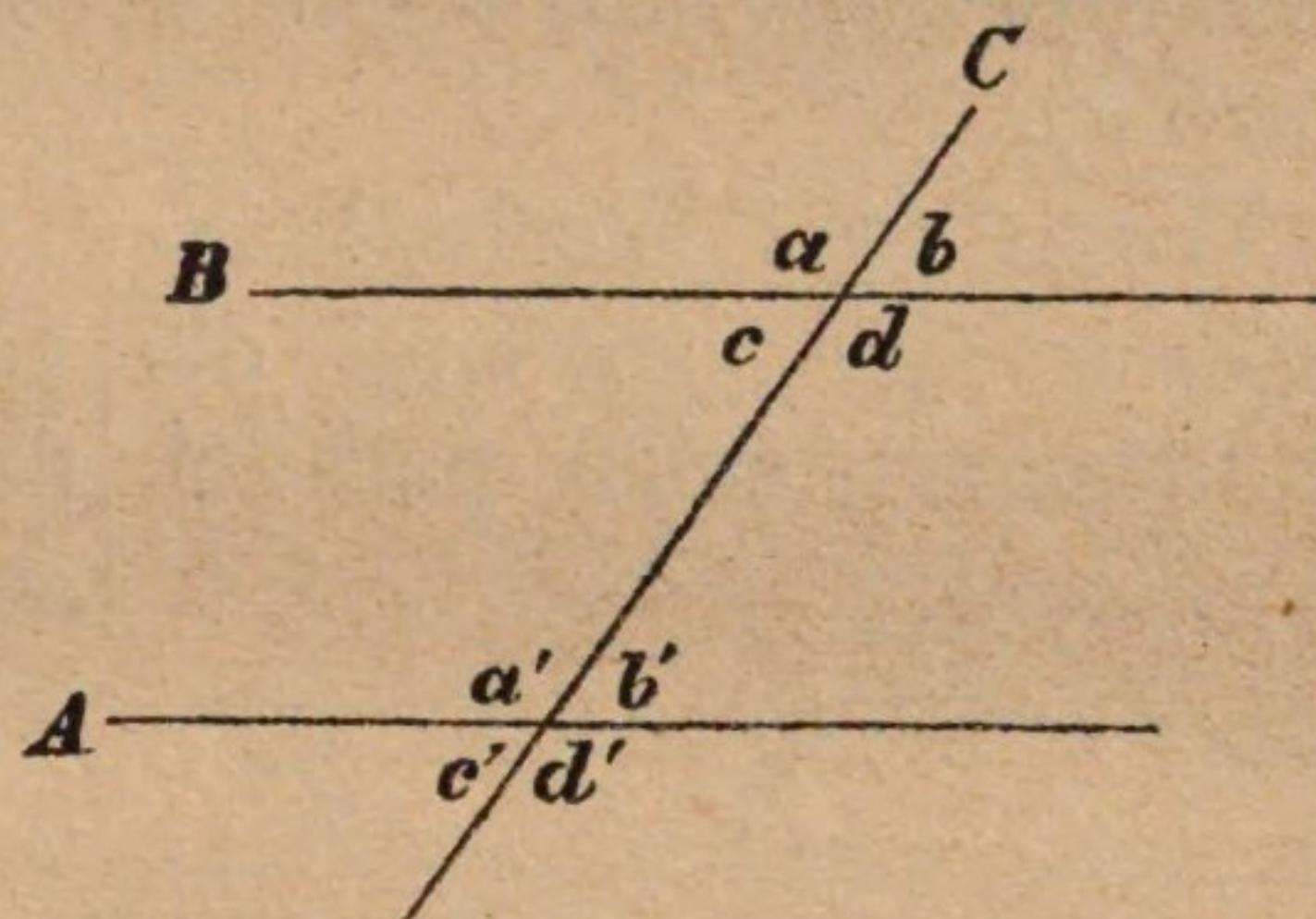


Fig. 9.



e) Zwei Winkel sind gleich, wenn ihre Schenkel paarweise nach einerlei Seite auf einander senkrecht stehen.

Beweis (Fig. 8). Die Winkel  $dsc$  und  $bsa$  sind gleich, weil sie Complementwinkel desselben Winkels  $csb$  sind (β).

## II. Abschnitt.

### Von den Parallel-Linien.

#### Erklärungen.

§ 8.

Wenn zwei Gerade  $A$  und  $B$  (Fig. 9) von einer dritten  $C$  geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, 4 innere ( $c, d, a', b'$ )



und 4 äussere ( $a, b, c', d'$ ). Die Winkel an verschiedenen Schnittpunkten werden in folgenden Arten paarweise zusammengefasst.

1) Zwei äussere oder zwei innere Winkel auf verschiedenen Seiten der durchschneidenden Geraden heissen Wechselwinkel.

2) Ein äusserer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der schneidenden Geraden heissen correspondirende Winkel (Gegenwinkel).

3) Zwei äussere oder zwei innere Winkel auf derselben Seite der schneidenden Geraden heissen entgegengesetzte Winkel oder Ergänzungswinkel.

### § 9. Sätze über die Parallel-Linien.

|                                                                                                                                           |                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Erklärung. Zwei Linien sind parallel (<math>\parallel</math>), wenn sie sich nicht schneiden, so weit man sie auch verlängern mag.</p> | <p>Grundsatz. Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden lässt sich nur eine Parallele zu derselben ziehen.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Anmerkung. Die Existenz paralleler Linien folgt aus dem Lehrsatz a).

a) Wenn zwei Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittenen Linien parallel.

$\alpha$ ) Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden durchschnitten, so sind Wechselwinkel gleich.

Fig. 10.

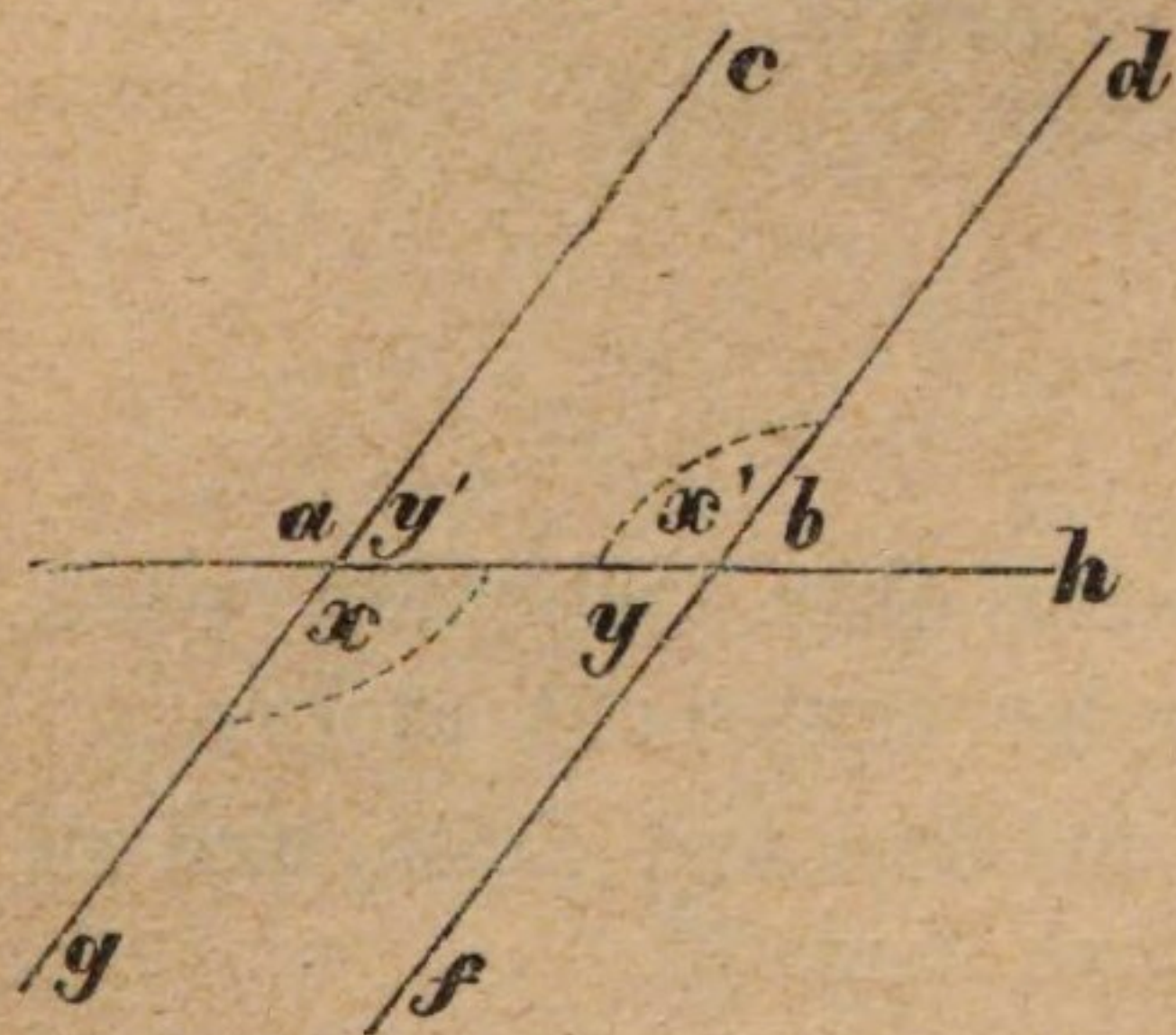
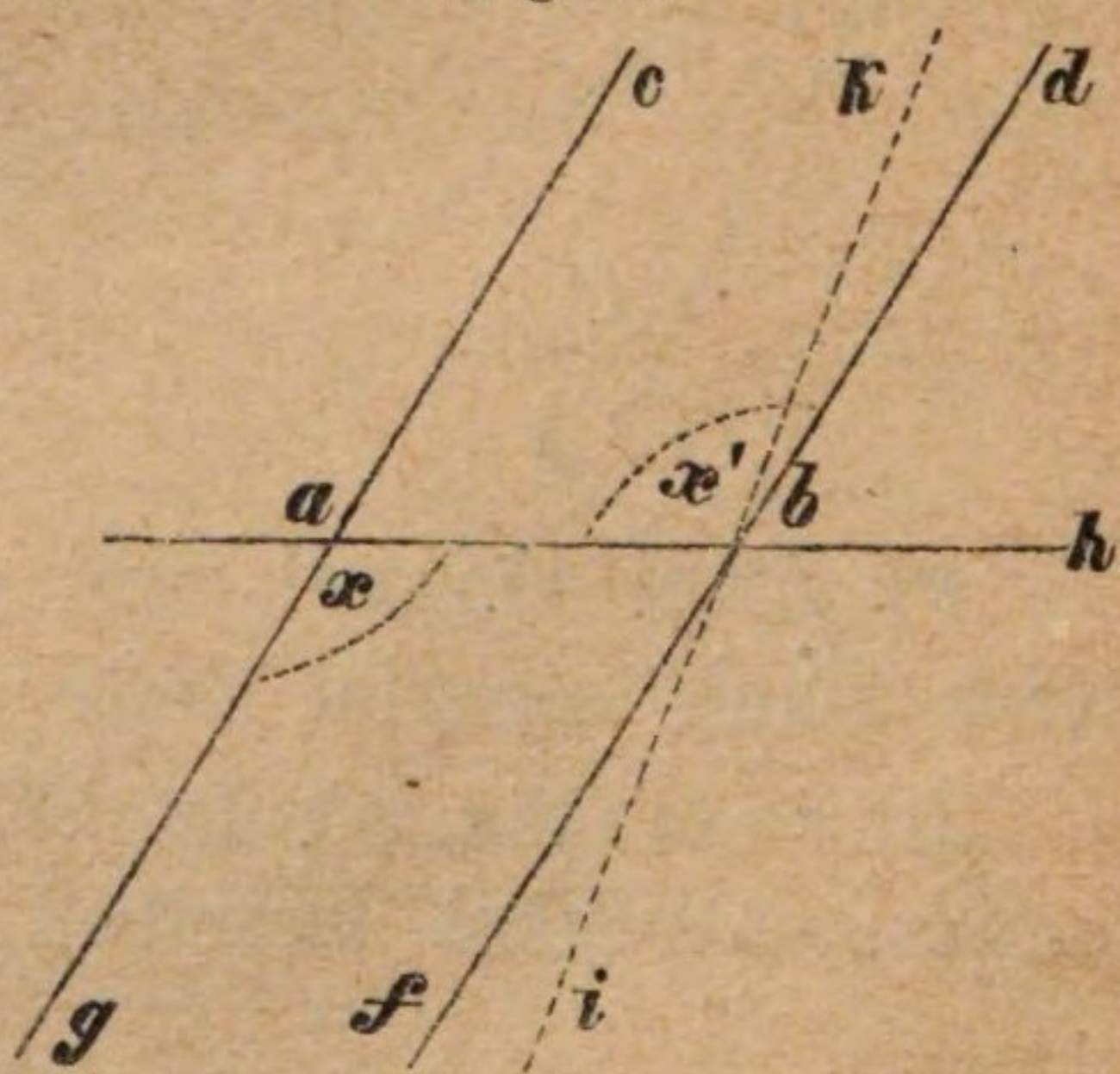


Fig. 11.



Beweis. a) Wenn 1) zwei innere Wechselwinkel  $x$  und  $x'$  (Fig. 10) gleich sind, so müssen auch ihre Nebenwinkel  $y$  und  $y'$  gleich sein (§ 7,  $\beta$ ). Dann sind die Figuren  $cabd$  und  $fbag$  vollkommen übereinstimmend. Wenn also  $ac$  von  $bd$  geschnitten würde, so müsste auch  $bf$  von  $ag$  geschnitten werden, d. h. die Geraden  $cg$  und  $df$  würden sich in 2 Punkten schneiden, was nicht möglich ist. Daher ist  $gc \parallel fd$ .



Wenn 2) äussere Wechselwinkel gleich sind, so müssen auch ihre Scheitelwinkel, welche innere Wechselwinkel sind, einander gleich und die Geraden nach 1) parallel sein.

$\alpha$ ) Wenn  $gc \parallel fd$  (Fig. 11), so müssen die Winkel  $x$  und  $x'$  gleich sein. Gesetzt, der Winkel  $x'$  wäre grösser als  $x$ , so könnte man  $ik$  so ziehen, dass  $\angle abk = x$ . Dann wäre  $ik \parallel gc$  (a), und es gingen durch den Punkt  $b$  zwei Gerade  $fd$  und  $ik$ , welche zu  $gc$  parallel sind, was nach dem festgestellten Grundsatz unmöglich ist. Ebenso wird bewiesen, dass  $x'$  nicht kleiner als  $x$  sein kann.

b) Sind zwei correspondirende Winkel einander gleich, so sind die geschnittenen Linien parallel.

$\beta$ ) Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so sind correspondirende Winkel gleich.

Beweis (Fig. 9).

Wenn  $\angle b = b'$ , so sind die Winkel  $c$  und  $b'$  gleich, weil beide dem Winkel  $b$  gleich sind (§ 7,  $\delta$ , Voraussetzung und Grundsatz II) und die Geraden  $A$  und  $B$  sind nach a) parallel.

Wenn  $A \parallel B$ , so ist auch  $\angle b = b'$ , denn beide sind dem Winkel  $c$  gleich (§ 9,  $\alpha$ ; § 7,  $\delta$ , § 3 Grundsatz II).

c) Wenn zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte betragen, so sind die geschnittenen Linien parallel.

$\gamma$ ) Wenn zwei Parallelen von einer dritten Geraden geschnitten werden, so betragen entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte.

Beweis (Fig. 9).

Wenn  $\angle b' + d = 2 R$ , so sind die Winkel  $c$  und  $b'$  gleich, weil beide den Winkel  $d$  zu zwei Rechten ergänzen (§ 7,  $\alpha$  und Voraussetzung). Die Geraden  $A$  und  $B$  sind also nach a) parallel.

Wenn  $A \parallel B$ , so muss der Winkel  $b'$  den Winkel  $d$  zu zwei Rechten ergänzen, weil  $b'$  dem Nebenwinkel  $c$  von  $d$  gleich ist (§ 9  $\alpha$ , § 3 Grundsatz I).

Anmerkung: Wenn zwei Sätze in der leicht zu charakterisirenden Abhängigkeit von einander stehen, wie  $a$  und  $\alpha$ ,  $b$  und  $\beta$ ,  $c$  und  $\gamma$ , so nennt man den einen dieser Sätze die Umkehrung des andern.



## § 10. Fortsetzung.

a) Wenn die eine von zwei Parallelen durch eine dritte Gerade geschnitten wird, so wird auch die andere geschnitten.  $\alpha$ ) Wenn zwei Gerade mit einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

Beweis. a) Wenn  $gc \parallel fd$  (Fig. 12) und  $gc$  von  $nm$  geschnitten wird, so muss auch  $fd$  von  $nm$  geschnitten werden, denn wenn dies nicht der Fall wäre, so gingen durch  $m$  zwei zu  $fd$  parallele Linien  $gc$  und  $nm$ , was nach dem Grundsatz des § 9 unmöglich ist.

Fig. 12.

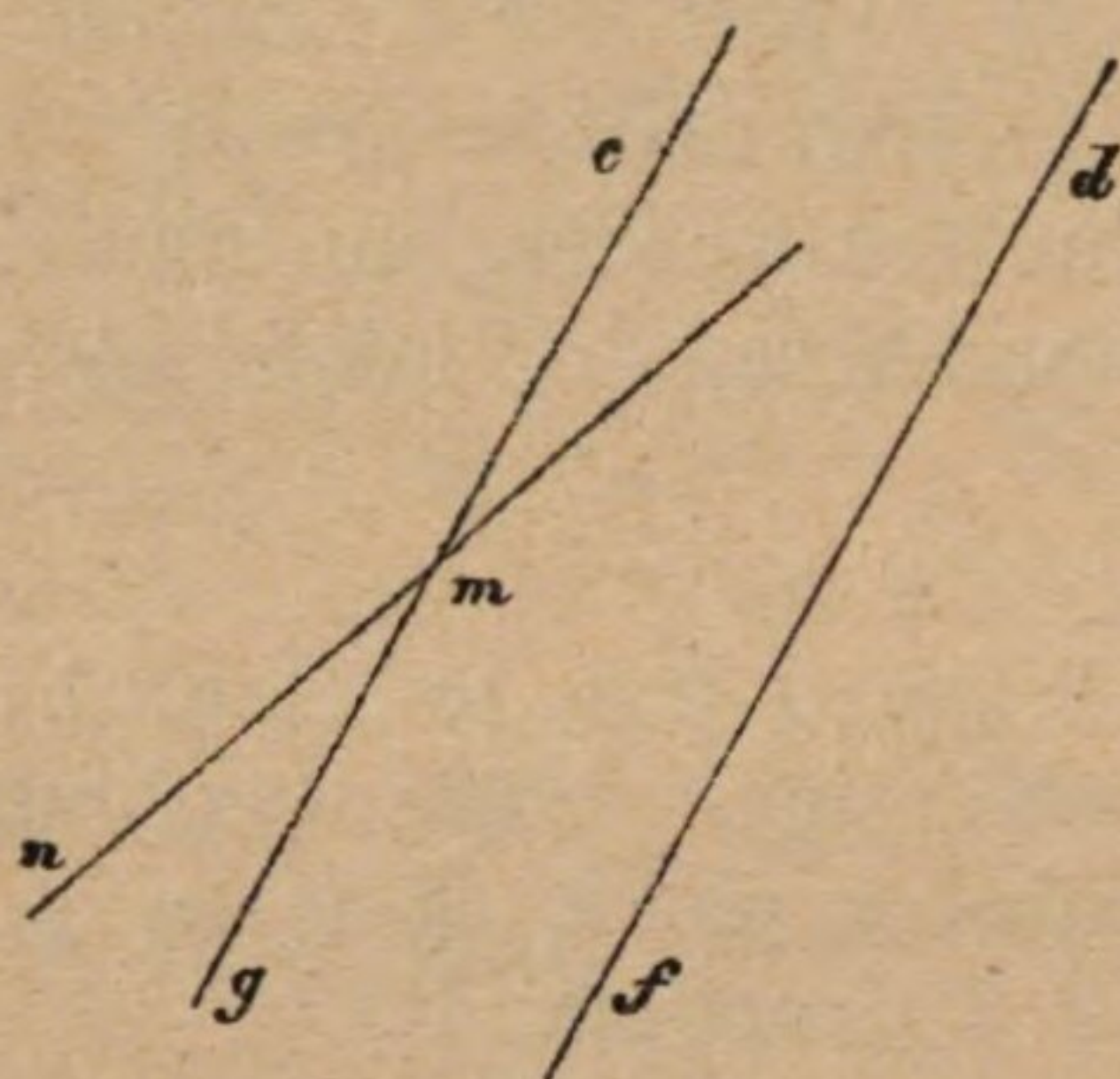
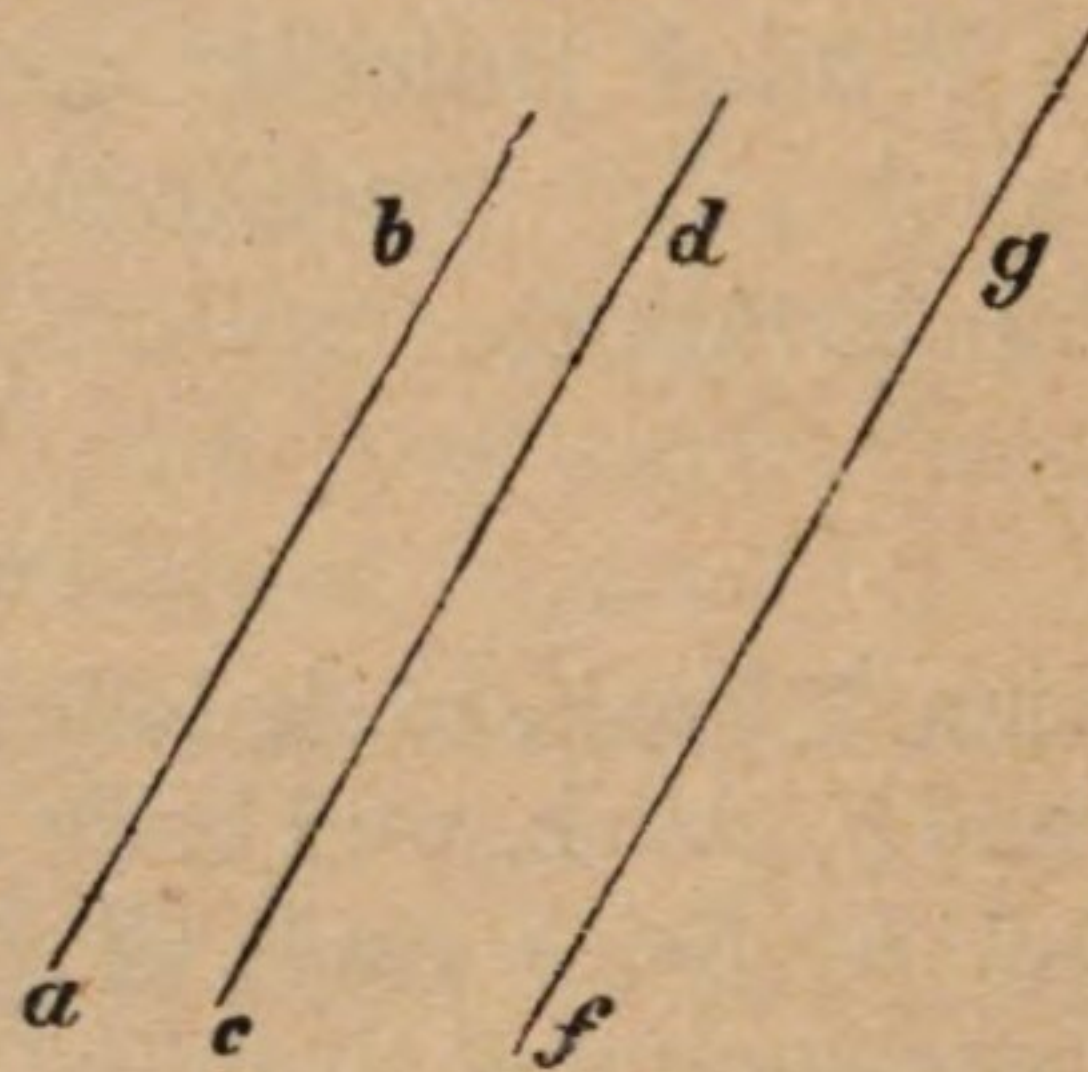


Fig. 13.



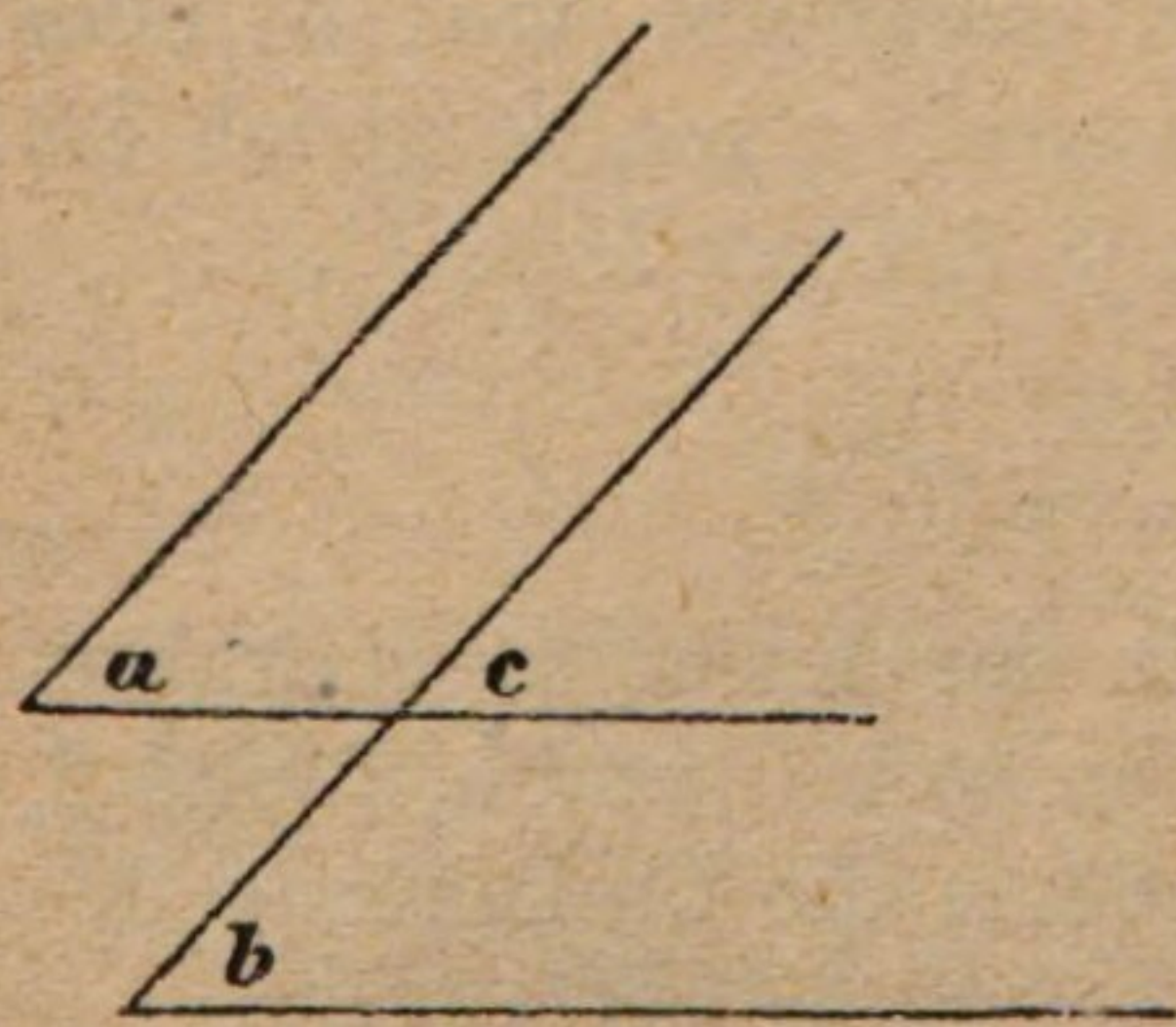
$\alpha$ ) Wenn  $ab \parallel cd$  (Fig. 13) und  $ab \parallel fg$ , so können  $cd$  und  $fg$  sich nicht schneiden und müssen deshalb parallel sein. Im andern Falle nämlich gingen durch den Schnittpunkt von  $cd$  und  $fg$  zwei zu  $ab$  parallele Linien  $cd$  und  $fg$ , was nach dem Grundsatz des § 9 unmöglich ist.

b) Winkel, deren Schenkel paarweise in gleicher Richtung parallel laufen, sind einander gleich.

Beweis. Die Winkel  $a$  und  $b$  (Fig. 14) sind gleich, weil beide nach § 9,  $\beta$  dem Winkel  $c$  gleich sind.

Anmerkung. Parallele Linien können als Gerade angesehen

Fig. 14.



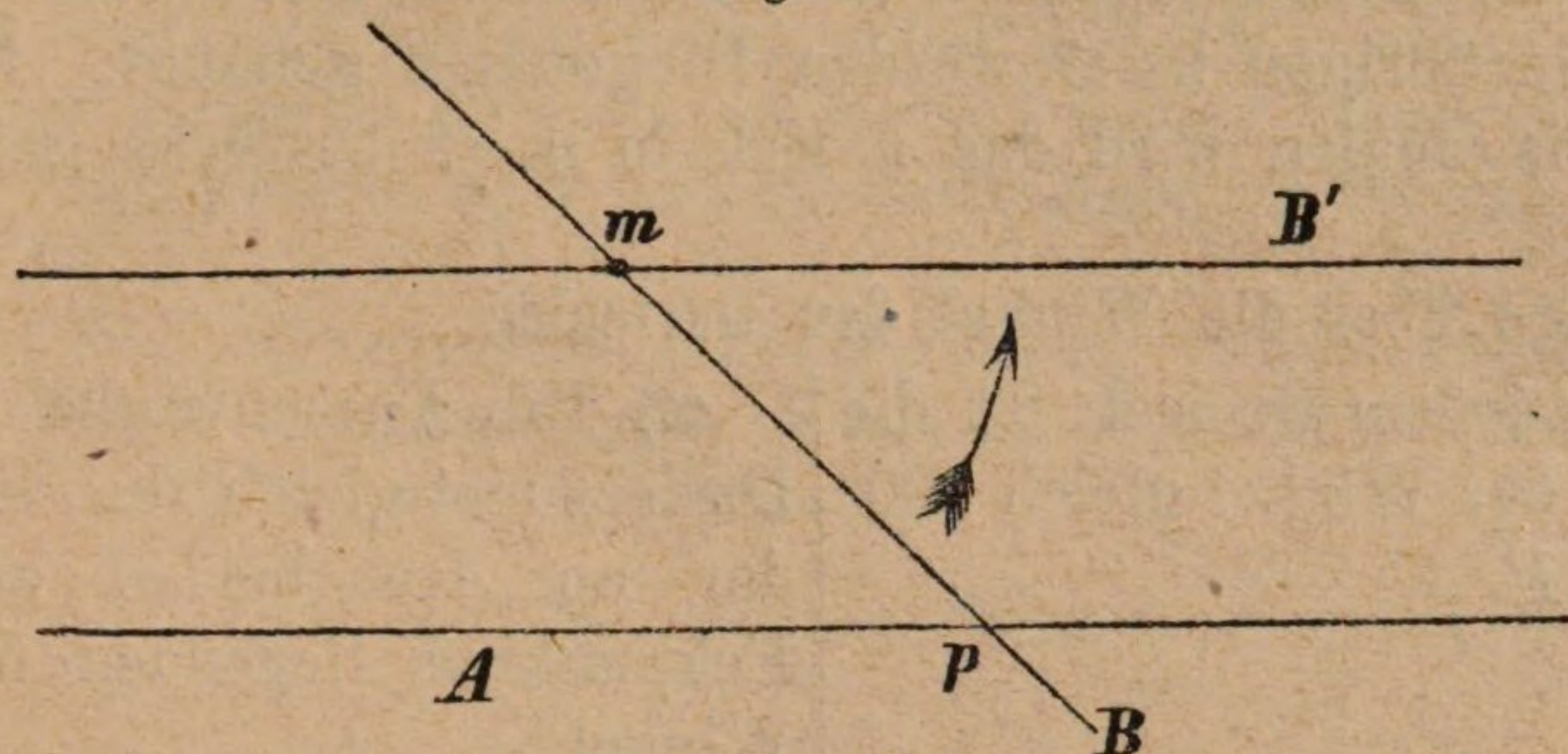
werden, welche sich in einem unendlich weit entfernten Punkte treffen.

Um dies einzusehen, bemerke man, dass die um  $m$  in der Richtung des Pfeiles sich drehende Gerade  $B$  (Fig. 15) die zu  $A$  parallele Lage  $B'$  in demjenigen Augenblick erreicht, wo ihr Schnittpunkt  $p$  mit  $A$  von der rechten Seite auf die linke überspringt. Dies geschieht aber nicht, bevor der



Schnittpunkt  $p$  die eine Seite der Geraden  $A$  bis in unendliche Ferne durchlaufen hat. Geht man umgekehrt von der parallelen Lage  $B'$  aus und setzt voraus, dass  $B'$  eine noch so kleine Drehung in dem einen oder andern Sinne ausführt, so erhält man Lagen, welche nicht mehr

Fig. 15.



mit  $A$  parallel sind (Grundsatz des § 9). Je kleiner aber die ausgeführte Drehung ist, um so weniger unterscheiden sich diese Lagen von der parallelen Lage  $B'$  und um so weiter entfernt ist zugleich der Schnittpunkt  $p$ , welcher einer dieser Lagen zukommt.

### III. Abschnitt.

#### Von den Winkeln geradliniger Figuren.

##### Erklärungen.

§ 11.

Wenn man einen beliebigen Punkt mit einem zweiten, diesen mit einem dritten und so fort, durch geradlinige Strecken verbindet und zuletzt wieder zu dem ersten Punkte zurückkehrt, so entsteht ein Vieleck.

Ein  $n$ -Eck hat  $n$  Winkel und  $n$  Seiten. Der durch eine Seite und die Verlängerung der benachbarten gebildete Winkel heisst ein Aussenwinkel des Vielecks.

Wenn der Umring eines Vielecks sich nicht selbst schneidet, so sind alle Winkel des letzteren hohl und das Vieleck schliesst einen einzigen vollständig begrenzten Raum ein. Ein Zuschauer durchläuft den Umring des Vielecks rechts oder links herum, je nachdem er diesen Raum rechter oder linker Hand hat. Denkt man hierbei jede Seite in der-

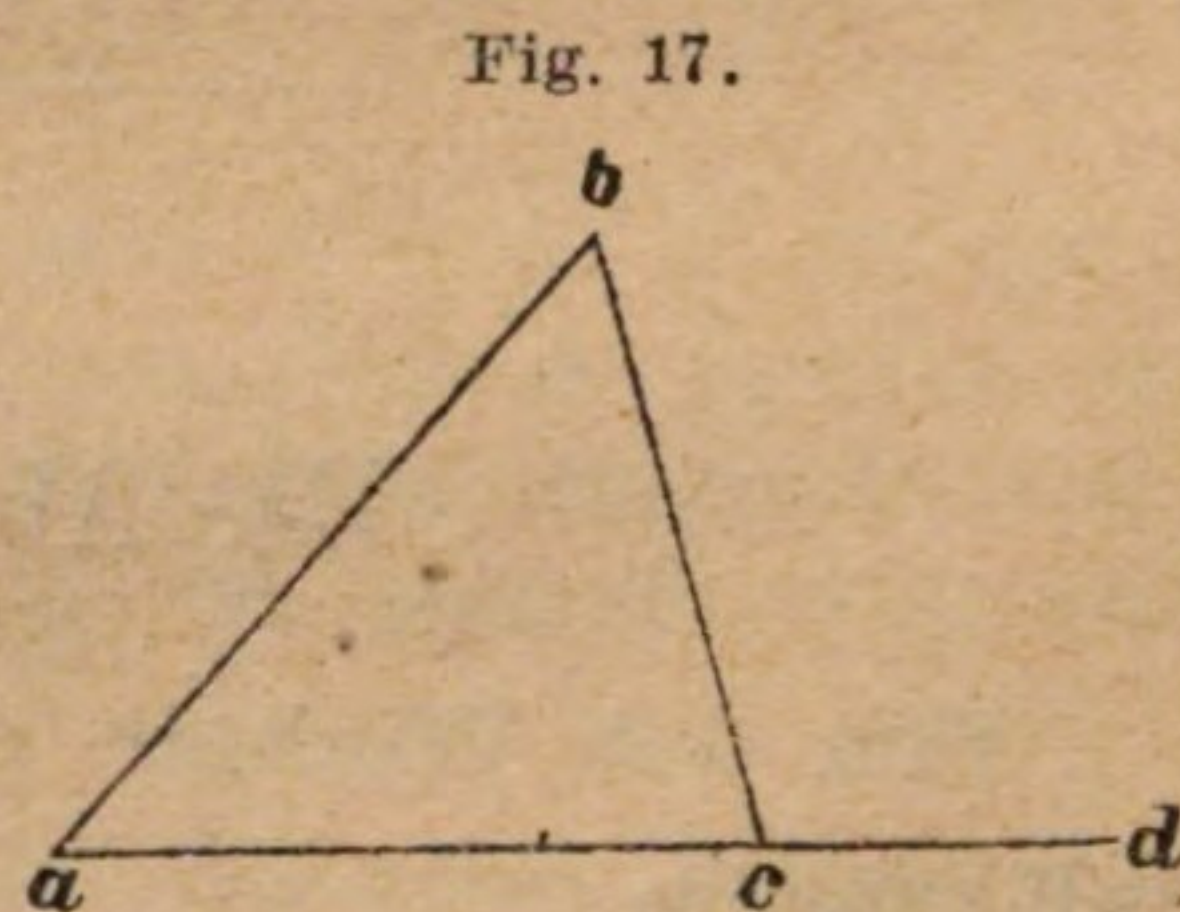
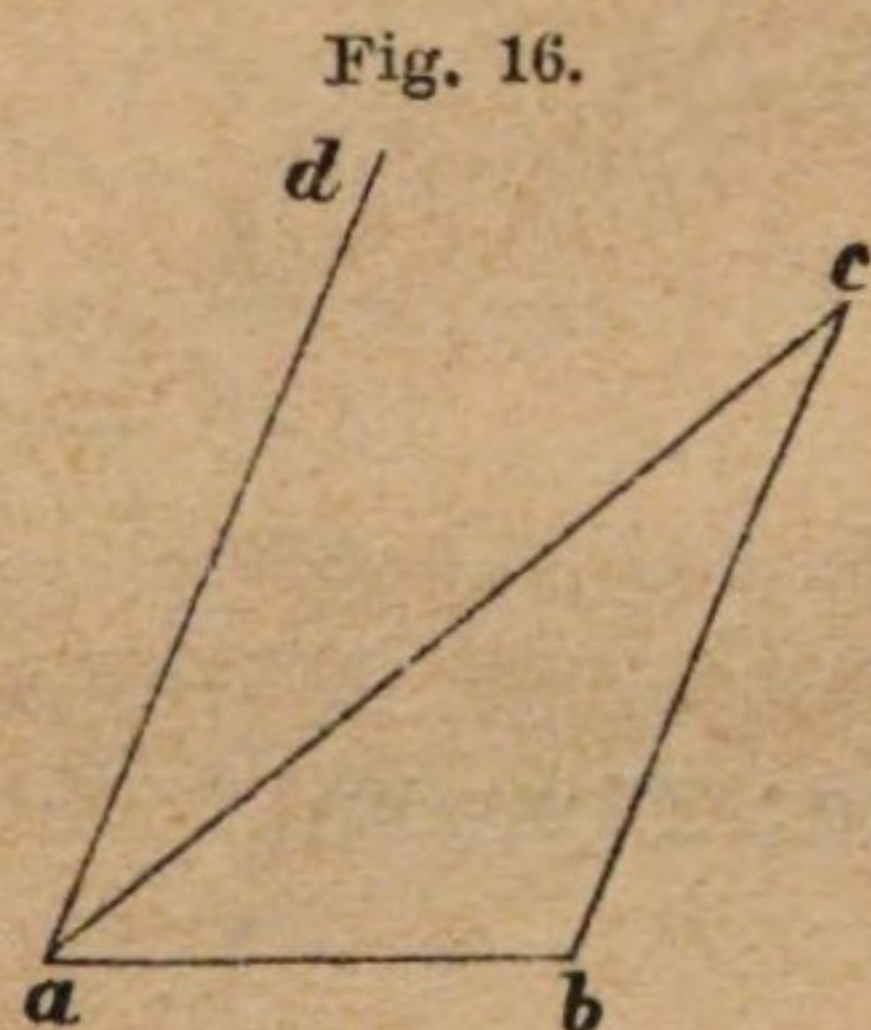


jenigen Richtung verlängert, in welcher sie durchlaufen wird, so erhält man  $n$  Aussenwinkel, welche man kurz als die Aussenwinkel des  $n$ -Ecks bezeichnet. — Durch einen Eckpunkt des Vielecks gehen  $n-1$  Strecken, welche denselben mit den übrigen Ecken verbinden. Zwei derselben sind Seiten des Vielecks, die übrigen  $n-3$  werden Diagonalen genannt. Durch diese Diagonalen wird das  $n$ -Eck in  $n-2$  Dreiecke getheilt.

§ 12. Sätze über die Winkel des Dreiecks,

- |                                                                                                          |                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) In jedem Dreieck ist die Summe der Winkel gleich <math>180^\circ</math> oder <math>2 R</math>.</p> | <p><math>\alpha</math>) Ein Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der an den beiden andern Eckpunkten liegenden innern Winkel.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Beweis. a) Man ziehe (Fig. 16)  $ad \parallel cb$ . Die Winkel  $dac$ ,  $cab$  und  $cba$  betragen alsdann zusammen  $180^\circ$  (§ 9,  $\gamma$ ) und man beweist die Behauptung, indem man für den Winkel  $dac$  den gleichen (§ 9,  $\alpha$ ) Winkel  $acb$  setzt.



$\alpha$ ) Der Aussenwinkel bei  $c$  (Fig. 17) ist gleich der Summe der innern Winkel bei  $a$  und  $b$ , weil beide Winkelgrößen mit dem Dreieckswinkel bei  $c$   $180^\circ$  betragen (§ 12,  $a$ , § 7,  $\alpha$ ).

Zusätze. b) In einem Dreieck kann nur ein einziger Winkel recht oder stumpf sein. — Ein Dreieck heisst spitzwinklig, wenn es drei spitze Winkel enthält. Es heisst recht- oder stumpfwinklig, wenn es einen rechten oder einen stumpfen Winkel enthält.

c) Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden kann man nur eine Senkrechte auf dieselbe fallen.

Sonst entstünde ein Dreieck mit 2 rechten Winkeln, was nicht möglich ist.



**Sätze über die Winkel der Vielecke.**

§ 13.

|                                                                                    |                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| a) Die Summe der Winkel eines $n$ -Ecks beträgt $(n-2) \cdot 2R$ oder $2nR - 4R$ . | α) Die Summe der Aussenwinkel eines $n$ -Ecks beträgt $4R$ . |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|

Beweis. a) Die Diagonalen eines Eckpunkts theilen das  $n$ -Eck in  $(n-2)$  Dreiecke. Die Winkel dieser Dreiecke bilden zusammen die  $n$  Winkel des  $n$ -Ecks und die Behauptung ergibt sich deshalb aus § 12, a.

α) Die Aussenwinkel müssen mit den Vieleckswinkeln zusammen  $n \cdot 2R$  bilden (§ 7, α) und die Behauptung ergibt sich deshalb aus § 13, a und Grundsatz IV.

Zusatz. b) Die Summe der Winkel eines Vierecks beträgt  $4R$ .

**Fortsetzung.**

§ 14.

Erklärung. Ein Viereck, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heisst Trapez.

Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heisst ein Parallelogramm.

|                                                                              |                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) Die gegenüberliegenden Winkel eines Parallelogramms sind einander gleich. | α) Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm. |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

a) Um die Gleichheit zweier gegenüberliegender Winkel zu beweisen, construirt man einen Aussenwinkel an einem der übrigen Eckpunkte. Man beweise nun nach § 9, α und β, dass dieser Aussenwinkel jedem der gegenüberliegenden Winkel gleich ist und schliesse die Behauptung aus Grundsatz II.

α) Aus § 13, b und der Voraussetzung folgt, dass die an einer Seite anliegenden Viereckswinkel zusammen  $180^\circ$  betragen. Man schliesst also nach § 9, c, dass die dieser Seite anliegenden Viereckseiten parallel sind. Ebenso wird der Parallelismus der übrigen Seiten bewiesen.

**Übungen.**

§ 15.

1) Wie viel Bogengrade enthält der 3., 5., 7., 11. Theil der Peripherie eines Kreises?

2) Die Peripherie eines Kreises misst 400 Meter.

Wie viel Grade enthalten die Bogen von  $1^m$ ,  $25^m$ ,  $75^m$ ,  $100^m$ ,  $200^m$ ?



3) Wie viel Meter betragen in diesem Kreise die Bogen, welche zu den Centriwinkeln von  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $130^\circ 2' 27''$  gehören?

4) Ein Erdmeridian ist (annäherungsweise) ein Kreis, dessen Peripherie 40000000 Meter lang ist. Wie viel Neumeilen hat ein Meridiangrad, wenn 7500 Meter eine Neumeile sind.

5) Wenn die Länge eines Erdmeridians 5400 geographische Meilen beträgt, wie viel geographische Meilen misst  $\alpha$ ) 1 Bogengrad,  $\beta$ ) der Meridianbogen von  $23\frac{1}{2}^\circ$ , welcher zwischen einem Wendekreise und dem Aequator oder zwischen dem Nordpol und einem Polarkreise gelegen ist?

6) Die beiden Linien, welche einen hohlen Winkel und den dazu gehörigen erhabenen Winkel halbiren, fallen in dieselbe Gerade (bilden einen gestreckten Winkel).

7) Die beiden Linien, welche einen Winkel und seinen Scheitelwinkel halbiren, fallen in dieselbe Gerade.

8) Wenn von einem Punkte vier Richtungen ausgehen und die nicht an einander liegenden Winkel gleich gross sind, so fallen je zwei dieser Richtungen in dieselbe Gerade (die Winkel sind Scheitelwinkel).

9) Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen senkrecht auf einander.

10) Von zwei Nebenwinkeln ist der eine doppelt so gross wie der andere. Wie gross ist jeder?

11) Zwei Nebenwinkel verhalten sich  $\alpha$ ) wie  $2 : 5$ ,  $\beta$ ) wie  $3 : 5\frac{1}{2}$ ,  $\gamma$ ) wie  $5\frac{1}{3} : 6\frac{1}{2}$ . Wie gross ist jeder?

12) Wenn in Fig. 9  $\angle a = 120^\circ 30' 2''$  ist, wie gross ist jeder der 7 andern Winkel?

13) § 7, e. Für den Fall zu beweisen, wo die beiden Winkel keinen gemeinsamen Scheitel haben.

14) Zwei Gerade, welche auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

15) Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei Dreiecke getheilt, deren Winkel paarweise einander gleich sind.

16) Die Winkel eines Dreiecks seien  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Wie gross sind dieselben, wenn  $\alpha$ )  $A=B=C$ .  $\beta$ )  $B=C$ ,  $A=88^\circ$ .  $\gamma$ )  $B=C=\frac{A}{2}$ .  $\delta$ )  $B=C=2A$ ,  $\varepsilon$ )  $B=C=2\frac{1}{2}A$ .

17) Wie gross sind diese Winkel, wenn sie sich verhalten wie  $\alpha$ )  $1 : 2 : 3$ ,  $\beta$ )  $2 : 6 : 12$ ,  $\gamma$ )  $1 : 5\frac{1}{2} : 11\frac{1}{2}$ ,  $\delta$ )  $\frac{1}{4} : \frac{2}{3} : \frac{5}{12}$ .

18) Die Halbirungslinien der Winkel  $B$  und  $C$  bilden einen Winkel, welcher  $90^\circ + \frac{1}{2}A$  ist.

19) Wie gross sind die Winkel  $B$  und  $C$ , wenn  $A=55^\circ 32'$  und der Aussenwinkel bei  $B$   $120^\circ 3' 2''$  beträgt?

20) In einem Dreieck, welches 2 gleiche Winkel an der Grundlinie hat, ist die Halbirungslinie des Aussenwinkels an der Spitze mit der Grundlinie parallel.

21) In einem Vieleck seien alle Winkel gleich gross. Wie gross ist jeder, wenn das Vieleck 4, 5, 6 . . . 20 Seiten hat?

22) Die Winkel eines Vierecks verhalten sich wie  $3 : 5 : 4 : 8$ . Wie gross ist jeder?



23) In einem Sechseck werden die Winkel  $124^{\circ} 10'$ ,  $108^{\circ} 16'$ ,  $130^{\circ} 40'$ ,  $127^{\circ} 9'$ ,  $97^{\circ} 50'$  und  $131^{\circ} 51'$  gemessen, wie gross ist der Fehler?

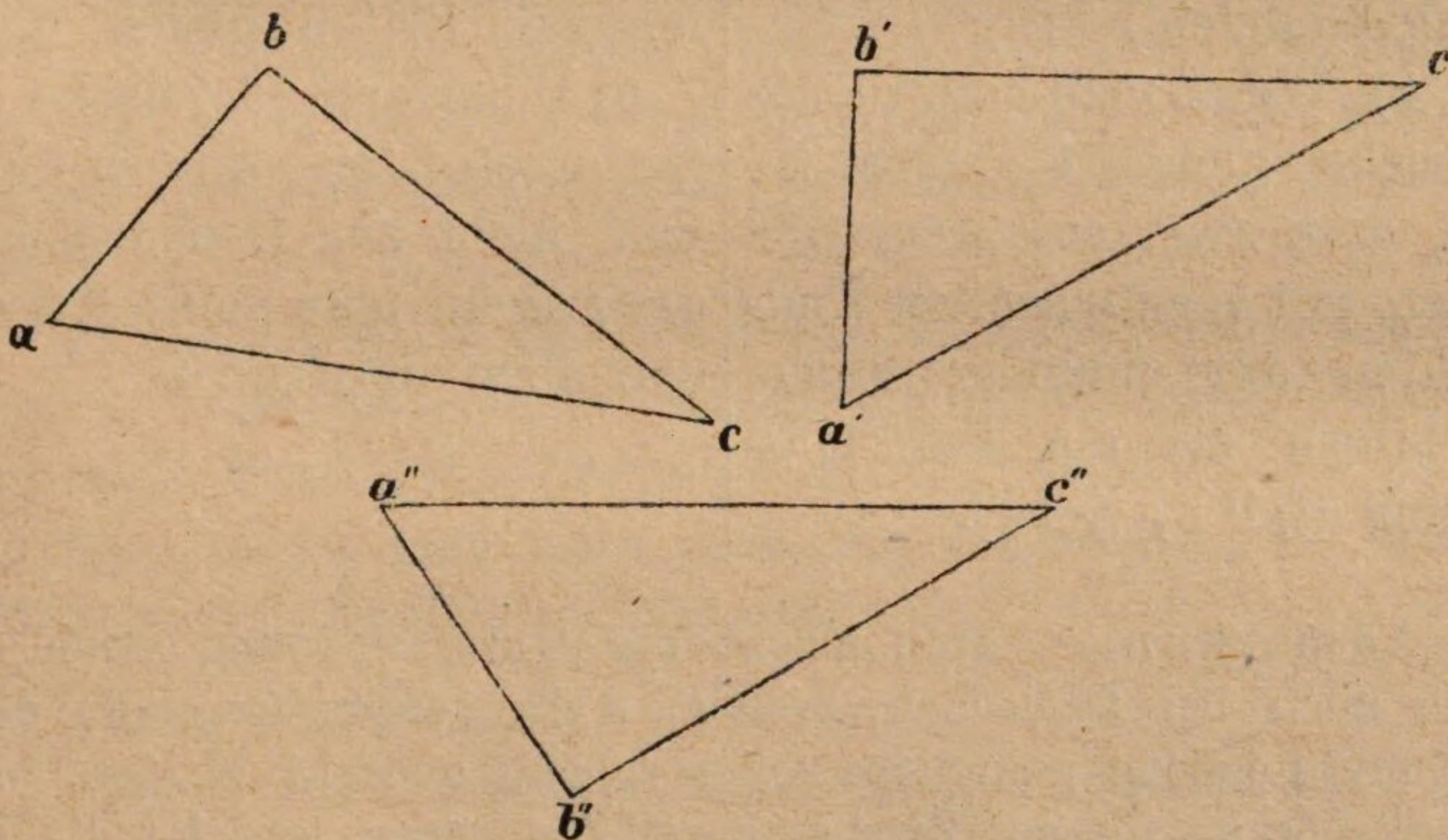
24) Die Halbierungslinien der Winkel eines Vierecks bilden ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Winkel supplementär sind. Wenn das erste Viereck ein Parallelogramm ist, so enthält das zweite lauter rechte Winkel.

## Zweiter Cursus.

### I. Abschnitt.

Die Congruenz der Dreiecke und Anwendungen derselben.

Fig. 18.



Erklärungen. Lagen congruenter Dreiecke gegen einander. § 16.

a) Zwei Dreiecke sind congruent (S), wenn man sie so auf einander legen kann, dass sie sich decken.

b) Die hierbei sich deckenden Seiten, Eckpunkte und Winkel werden entsprechend genannt.  $\beta$

Anmerkung. Das Zeichen S für die Congruenz heisst gleich (an Fläche) und ähnlich (übereinstimmend in der Form). S ist der Anfangsbuchstabe von similis.



c) Man denke sich zwei congruente Dreiecke in Deckung. Wenn man das eine derselben verschiebt ohne es umzuwenden, so erhält man neue Lagen der beiden Dreiecke. Die Dreiecke heissen in allen diesen Lagen congruent und von gleichem Sinne.

d) Wenn man congruente Dreiecke gleichen Sinnes so legt, dass zwei entsprechende Seiten mit entsprechenden Endpunkten auf einander fallen, so decken sich die Dreiecke. (Denn sie sind wieder in ihre anfängliche Lage zurückgekommen.)

e) Wenn man congruente Dreiecke gleichen Sinnes so legt, dass zwei entsprechende Seiten mit verwechselten Endpunkten auf einander fallen, so bilden sie ein Parallelogramm (§ 9 a, § 14).

γ) Man denke sich zwei congruente Dreiecke in Deckung. Wenn man das eine derselben umwendet und sodann verschiebt, so erhält man neue Lagen der beiden Dreiecke. Die Dreiecke heissen in allen diesen Lagen congruent und von entgegengesetztem Sinne.

δ) Wenn man congruente Dreiecke entgegengesetzten Sinnes so legt, dass zwei entsprechende Seiten mit entsprechenden Endpunkten auf einander fallen, so bilden sie ein Deltoid, d. h. ein Viereck, in welchem zwei mal zwei folgende Seiten gleich sind.)\*

ε) Congruente Dreiecke entgegengesetzten Sinnes kann man nicht zur Deckung bringen, wenn man nicht das eine derselben umwendet.

Anmerkung. Man macht die Unterscheidung nach dem Sinne auch bei Dreiecken, welche nicht congruent sind, deren Eckpunkte jedoch paarweise entsprechend gedacht werden. Man denke sich zu diesem Zwecke zwei Zuschauer, welche die Umringe der Dreiecke so durchlaufen, dass sie sich gleichzeitig in entsprechenden Ecken befinden. Die Dreiecke sind gleichen Sinnes oder nicht, je nachdem die Zuschauer die Flächen der umgangenen Dreiecke auf der gleichen Seite (d. h. beidemal rechts oder beidemal links) liegen haben oder nicht.

## § 17. Erster und zweiter Fall der Congruenz.

a) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Seiten

α) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Winkel

\*) Deltoide mit erhabenen Winkeln sind nicht ausgeschlossen.



und den eingeschlossenen Winkel entsprechend gleich haben. und die eingeschlossene Seite entsprechend gleich haben.

Voraussetzung:

- 1)  $\sphericalangle b = \sphericalangle b'$  (Fig. 18.)
- 2)  $ba = b'a'$
- 3)  $bc = b'c'$

Man lege die Dreiecke so aufeinander, dass die gleichen Winkel  $b$  und  $b'$  sich decken.

Dann fällt auch die Seite  $ba$  in die Richtung der Seite  $b'a'$  und die Seite  $bc$  in die Richtung der Seite  $b'c'$  (§ 3 c).

Wegen der Voraussetzung 2) fällt dann auch der Punkt  $a$  auf  $a'$  und wegen Voraussetzung 3) der Punkt  $c$  auf  $c'$  (§ 3 d).

Die Dreiecke  $abc$  und  $a'b'c'$  decken sich also, weil ihre Ecken paarweise in die nämlichen Punkte fallen und sind deshalb congruent.

Voraussetzung:

- 1)  $ac = a'c'$  (Fig. 18.)
- 2)  $\sphericalangle a = \sphericalangle a'$
- 3)  $\sphericalangle c = \sphericalangle c'$

Man lege die Dreiecke so aufeinander, dass die gleichen Seiten  $ac$  und  $a'c'$  sich decken.

Dann fällt auch der Punkt  $a$  auf den Punkt  $a'$  und der Punkt  $c$  auf den Punkt  $c'$  (§ 3 γ).

Wegen der Voraussetzung 2) fällt dann auch die Seite  $ab$  in die Richtung  $a'b'$  und wegen Voraussetzung 3)  $cb$  in die Richtung  $c'b'$  (§ 3 d).

Die Dreiecke  $abc$  und  $a'b'c'$  decken sich also, weil ihre Seiten paarweise in die nämlichen Geraden fallen und sind deshalb congruent.

b) Zusatz zu § 17 α). Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel entsprechend gleich haben.

Nach § 12 sind dann auch die dritten Winkel einander gleich und die Congruenz folgt aus α).

### Das gleichschenklige Dreieck.

Ein Dreieck, welches zwei gleiche Seiten hat, heisst gleichschenkelig. Die gleichen Seiten (Schenkel) schneiden sich in der Spitze des Dreiecks und die dritte Seite heisst Grundlinie. In einem Dreieck mit beliebigen Seiten kann man jede Seite als Grundlinie bezeichnen.

a) Jedes gleichschenklige Dreieck wird durch die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze in zwei congruente Dreiecke getheilt.

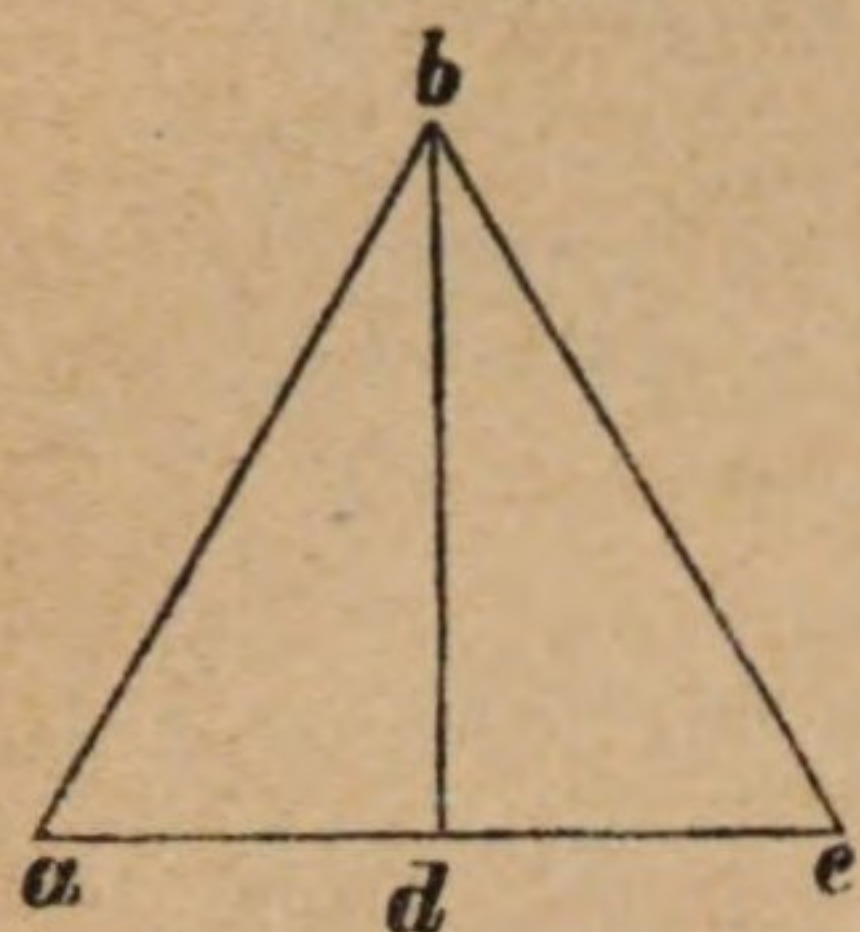
α) Jedes Dreieck, in welchem zwei Winkel gleich sind, wird durch die Halbierungslinie des dritten Winkels in zwei congruente Dreiecke getheilt.

Beweis. (Fig. 19.) a) Wenn  $ba = bc$  und  $bd$  die Halbierungslinie des Winkels bei  $b$  ist, so sind die Dreiecke  $abd$  und  $cbd$  nach

§ 18.



Fig. 19.



dem § 17 a congruent.  $\alpha$ ) Wenn  $\sphericalangle a = c$  und  $bd$  die Halbierungslinie des Winkels bei  $b$  ist, so sind die Dreiecke  $abd$  und  $cbd$  nach § 17 b congruent.

$\beta$ ) In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich (§ 18 a).

$\beta$ ) Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln ist gleichschenkelig (§. 18  $\alpha$ ).

Zusatz. Die Winkel des gleichseitigen Dreiecks sind gleich gross ( $60^\circ$ ).

Weitere Sätze über das gleichschenklige Dreieck.

c) Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze fällt mit der Mittelsenkrechten der Grundlinie zusammen.

Beweis. (Fig. 19.) Nach § 18 a ist  $da = dc$  und  $\sphericalangle adb = \sphericalangle cdb = 90^\circ$ .  $bd$  ist also die Mittelsenkrechte von  $ac$ .

d) Die Mittelsenkrechte der Grundlinie geht durch die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks und halbiert den Winkel daselbst.

Der Beweis folgt unmittelbar aus c).

e) Die von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Senkrechte halbiert diese und den Winkel an der Spitze.

Beweis. Diese Gerade fällt mit der Mittelsenkrechten der Grundlinie zusammen, weil die letztere auch durch die Spitze geht (d) und nicht zwei auf der Grundlinie senkrechte Gerade durch die Spitze gehen können (§ 12 c). Wende c) an.

f) Die Linie, welche die Mitte der Grundlinie mit der Spitze verbindet, steht senkrecht auf der Grundlinie und halbiert den Winkel an der Spitze.

Beweis. Diese Gerade fällt ebenfalls mit der Mittelsenkrechten der Grundlinie zusammen, weil sie die beiden Punkte  $d$  und  $b$  mit ihr gemein hat (d). Wende c) an.

## § 19. Aufgaben.

a) Die Mittelsenkrechte einer Strecke zu construiren.  $\alpha$ ) Die Halbierungslinie eines Winkels zu construiren.

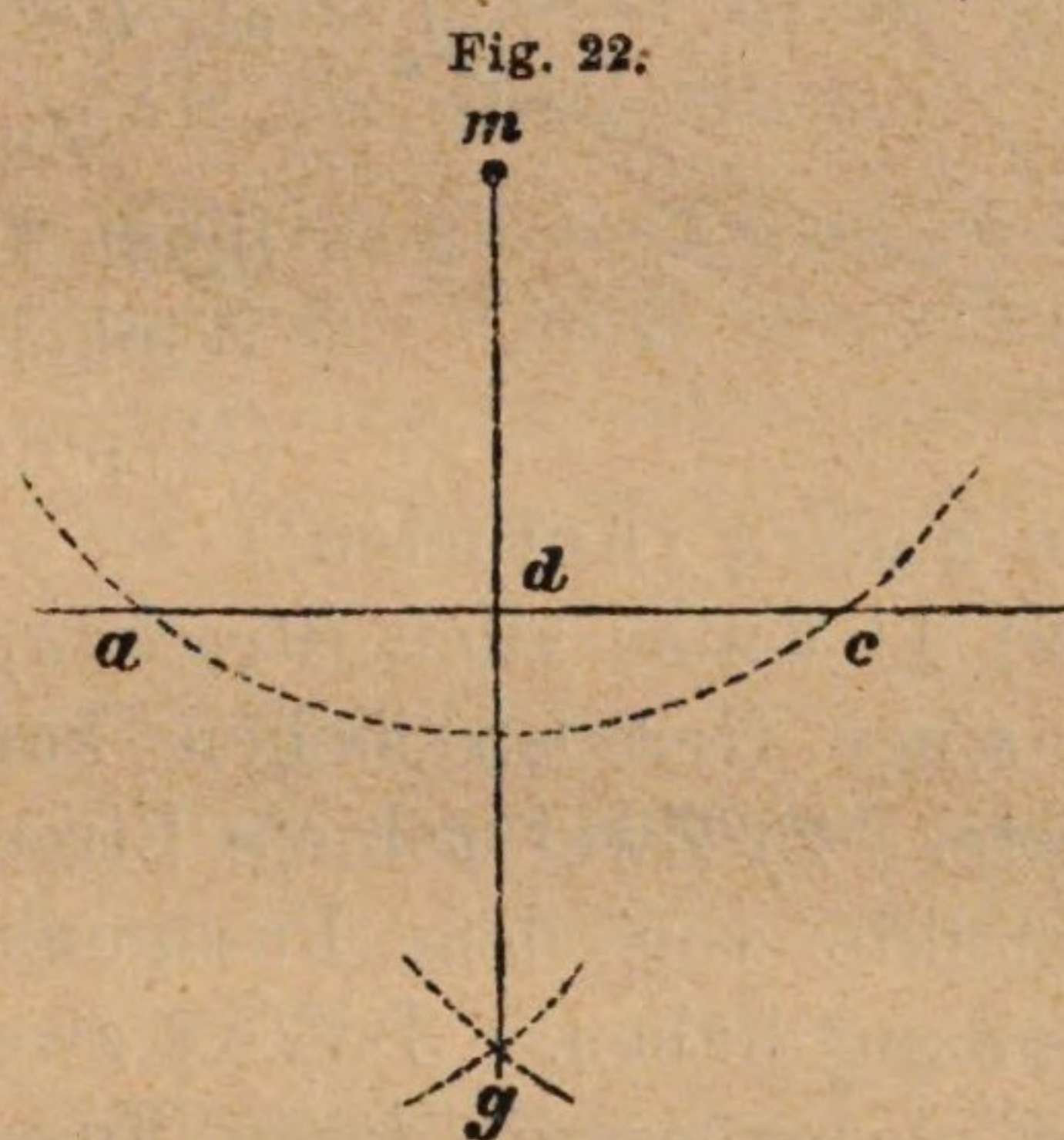
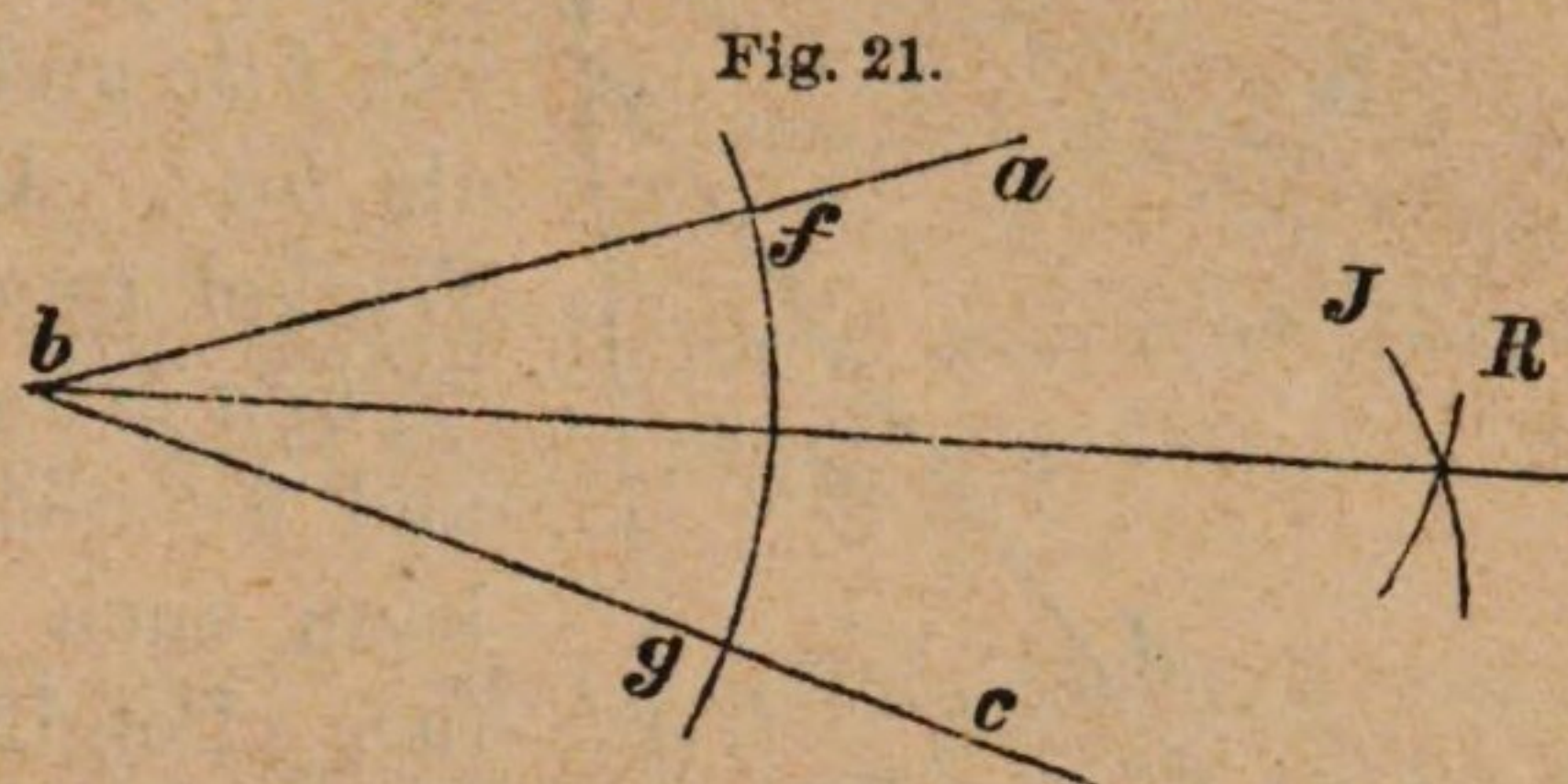
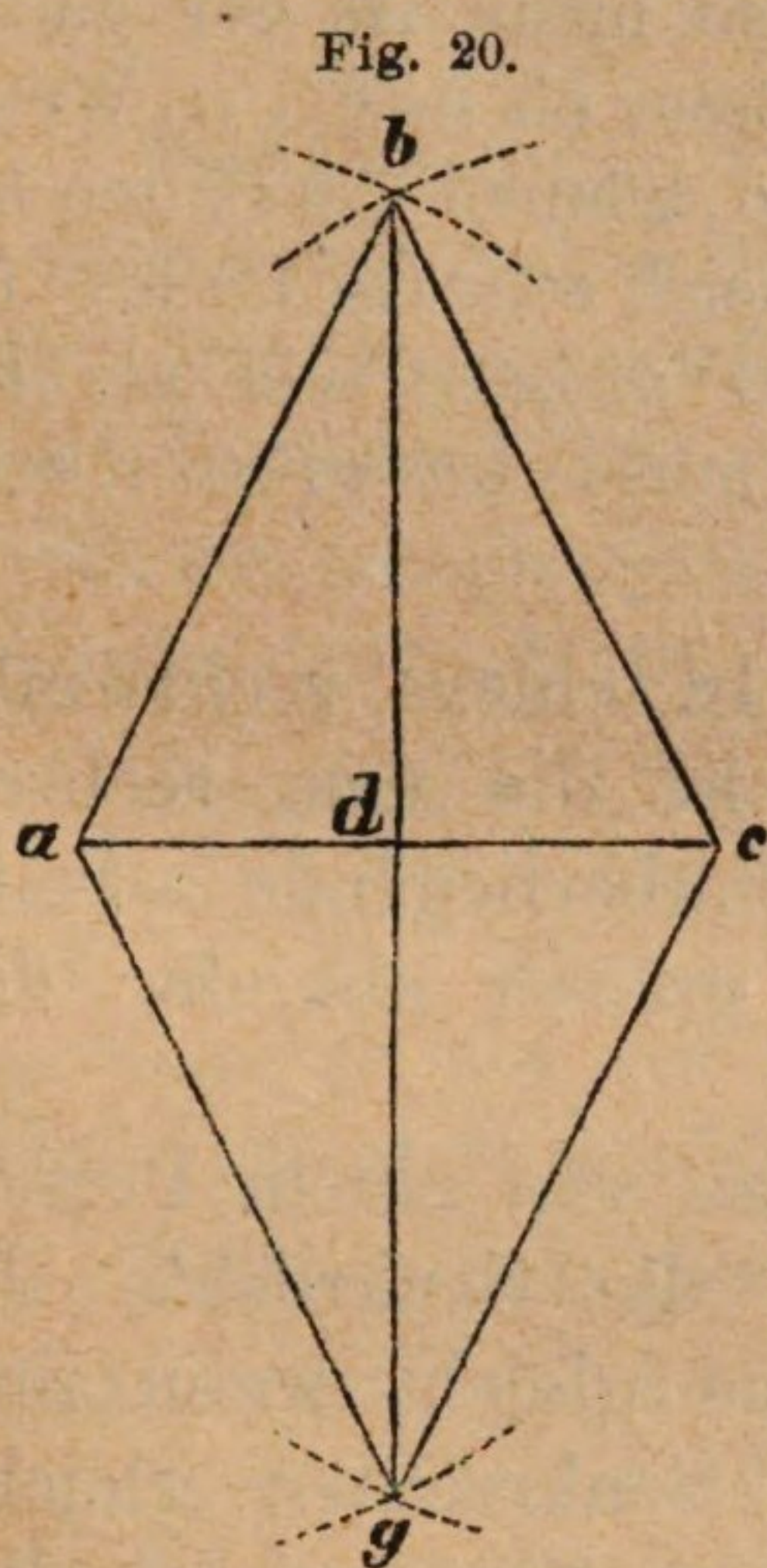
### Auflösungen.

Man ziehe um die Endpunkte  $a$  und  $c$  der Strecke (Fig. 20) zwei Kreise, um den Winkel  $abc$  (Fig. 21) zu halbiren, ziehe man mit belie-



als Mittelpunkte Kreise von gleichem Radius, welche sich schneiden. Die Schnittpunkte  $b$  und  $g$  liegen auf der gesuchten Senkrechten (§ 18 d).

bigem Radius um  $b$  einen Kreisbogen  $fg$ . Mit dem gleichen Radius ziehe man um  $f$  und  $g$  Kreise, welche sich in  $b$  und in einem Punkte der gesuchten Halbierungslinie schneiden (§ 18 c, § 19 a).



**b)** In einem gegebenen Punkte innerhalb einer Geraden eine Senkrechte auf dieselbe zu errichten.

**β)** Von einem gegebenen Punkte ausserhalb einer Geraden eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

#### Auflösungen.

Ist  $d$  (Fig. 20) der gegebene Punkt, so schneide man mit dem Zirkel auf beiden Seiten gleiche Stücke  $da$  und  $dc$  ab. Mit einem Radius, welcher grösser ist, als  $ad$ , ziehe man um  $a$  und  $c$  Kreise. Ihre Schnittpunkte liegen auf der gesuchten Senkrechten. (§ 18 f.)

Man ziehe um den gegebenen Punkt  $m$  (Fig. 22) einen Kreis, welcher die Gerade in  $a$  und  $c$  schneidet. Mit dem nämlichen Radius ziehe man um  $a$  und  $c$  zwei Kreise, welche sich in  $m$  und einem zweiten Punkte der gesuchten Senkrechten schneiden. (§ 18 d, § 19 a.)

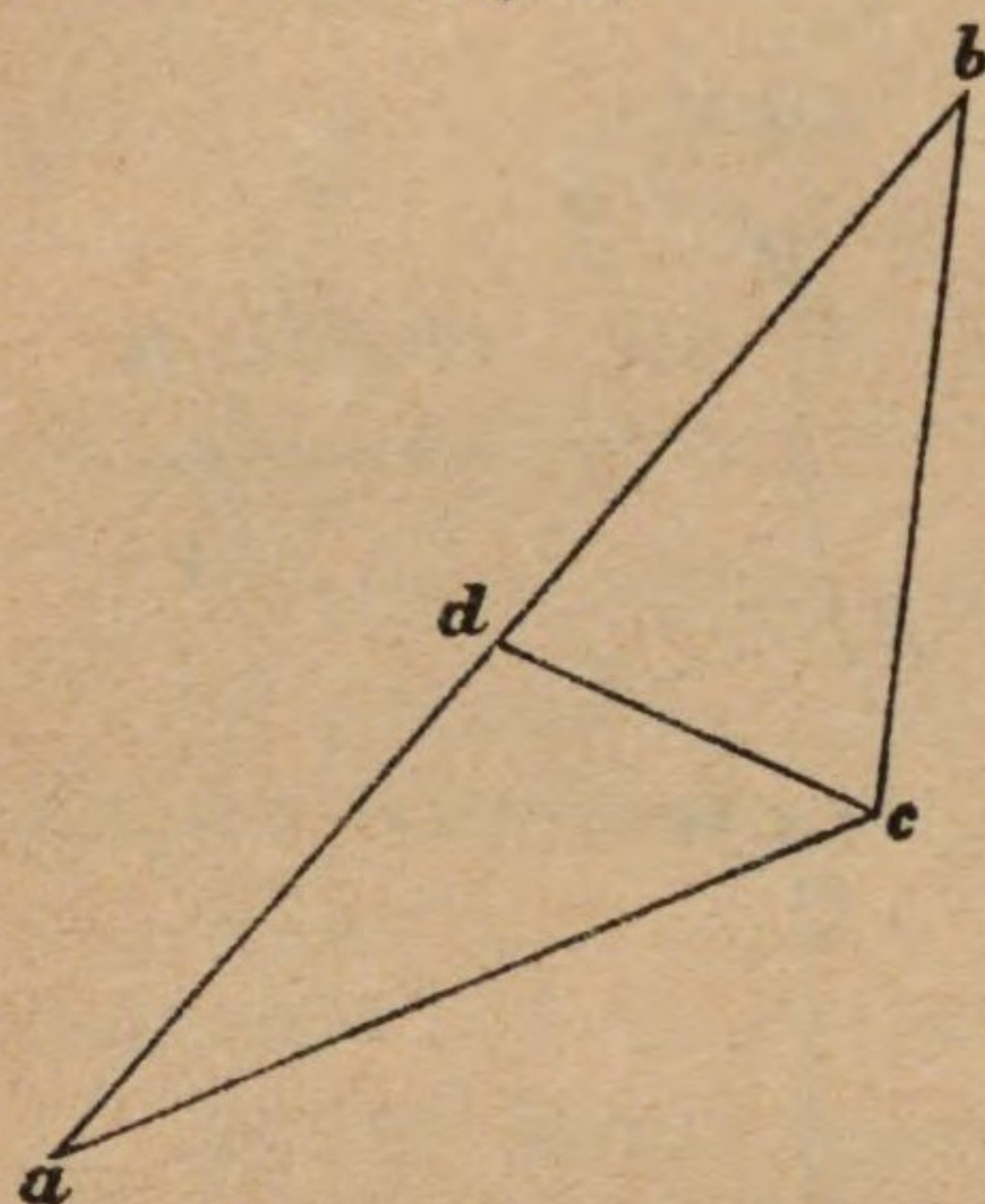


## § 20. Ungleichungen über Seiten oder Winkel des Dreiecks.

a) In jedem Dreieck liegt der grösseren Seite auch der grössere Winkel gegenüber.  $\alpha$ ) In jedem Dreieck liegt dem grösseren Winkel auch die grössere Seite gegenüber.

Beweis. (Fig. 23.)

Fig. 23.



a) Wenn  $ba > bc$ , so mache man  $bd = bc$ . Dann ist  $\sphericalangle bdc = \sphericalangle bcd$  (§ 18 b). Nun ist (§ 12  $\alpha$ ) Winkel  $bdc$  und folglich auch  $bcd$  grösser als  $bac$ . Um so mehr ist der ganze Winkel  $bca$  grösser als  $bac$ .  $\alpha$ ) Wenn  $\sphericalangle bca > \sphericalangle bac$ , so können die Seiten  $ba$  und  $bc$  nicht gleich sein (§ 18 b.)  $bc$  kann auch nicht grösser sein als  $ba$  (a). Folglich muss  $ba$  grösser sein als  $bc$ .

Zusatz. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite (Hypotenuse) grösser als eine der beiden andern (Katheten).

b) 1) Unter allen Strecken, die man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste. 2) Zwei schiefe Strecken sind gleich, wenn ihre Fusspunkte von dem Fusspunkte der Senkrechten gleiche Entfernung haben. 3) Von zwei schiefen Strecken ist diejenige die grössere, deren Fusspunkt von dem Fusspunkte der Senkrechten die grössere Entfernung hat.

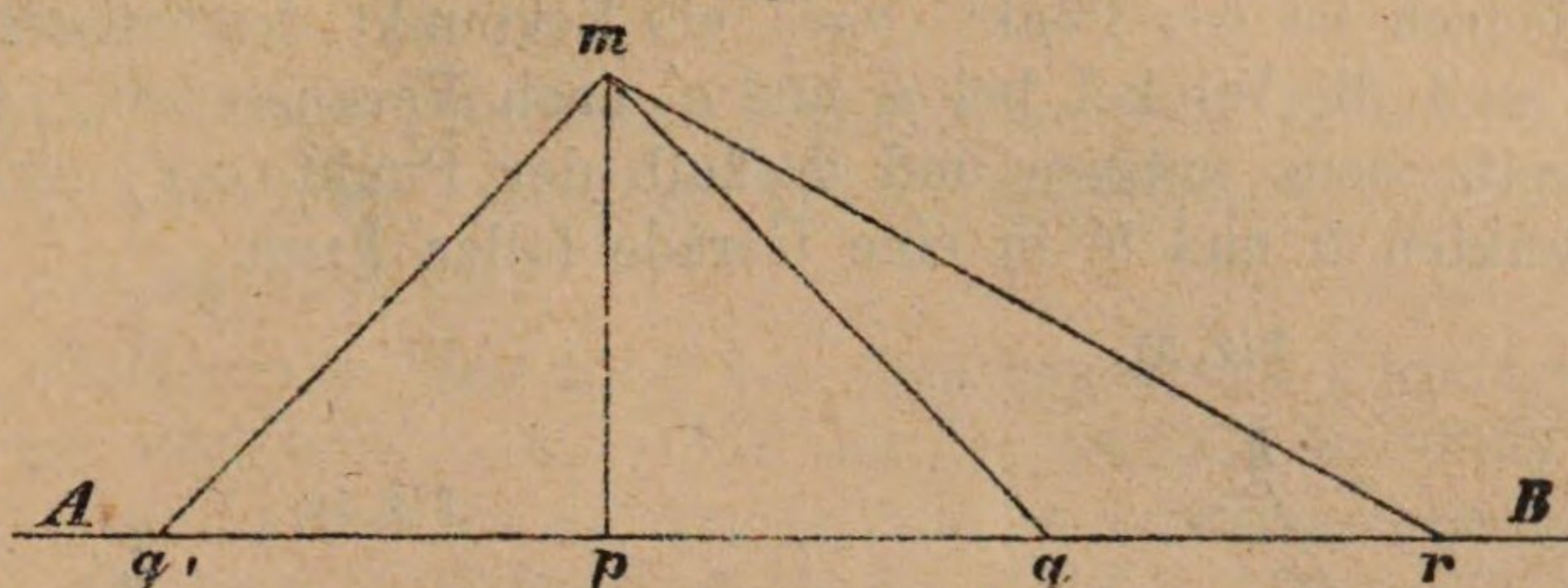
Beweis. (Fig. 24.) Wenn  $mp \perp AB$ ,  $pq = pq'$  und  $pr > pq$ , so folgt 1)  $mp < mq$  ( $\alpha$ ), 2)  $mq = mq'$  (aus der Congruenz der Dreiecke  $pqm$  und  $pq'm$  nach § 17 a und § 16  $\beta$ ), 3)  $mr > mq$ , da  $mqr$  ein stumpfer Winkel ist ( $\alpha$ ).

Anmerkung. Wenn man in einem Dreieck irgend eine Seite als Grundlinie ansieht, so heisst die von der gegenüberliegenden Spitze auf die Grundlinie gefällte Senkrechte die zugehörige Höhe des Dreiecks. Bei dem gleichschenkligen Dreieck kommt vorzugsweise die aus dem Schnittpunkte der gleichen Seiten, bei dem rechtwinkligen Dreieck die aus dem Scheitel des rechten Winkels gefällte Höhe in Betracht.  $mp$  (Fig. 24) ist Höhe in den Dreiecken  $q'mq$ ,  $qmr$ . Sie trifft die Grundlinie des einen und die Verlängerung der Grundlinie des andern Dreiecks.  $p$  wird die Projection des Punktes  $m$  auf die Gerade  $AB$  genannt.



$q'p$ ,  $qp$ ,  $pr$  sind die Projectionen der Strecken  $mq'$ ,  $mq$ ,  $mr$  auf  $AB$ .

Fig. 24.



Erklärung. Die von einem Punkte auf eine Gerade gefällte senkrechte Strecke wird Entfernung des Punktes von der Geraden genannt.

c) In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

$\gamma$ ) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite.

Beweis. c) (Fig. 23.) Die Differenz  $ad$  der Seiten  $ab$  und  $bc$  ist nach § 20  $\alpha$  kleiner als  $ac$ , weil der Winkel  $adc$  grösser als  $acd$  ist (§ 4, VI).  $\gamma$ ) Um  $ab + bc > ac$  zu beweisen müsste man die Seite  $bc$  auf der Verlängerung von  $ab$  auftragen und ebenfalls § 20  $\alpha$  anwenden.

### Dritter und vierter Fall der Congruenz.

§ 21.

a) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie die drei Seiten entsprechend gleich haben.

$\alpha$ ) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Seiten und den der grösseren gegenüberliegenden Winkel entsprechend gleich haben.

Voraussetzung:

$$\begin{aligned} ab &= a'b' \text{ (Fig. 25 oder 26),} \\ ac &= a'c' \\ bc &= b'c' \\ ac &> cb^*) \end{aligned}$$

Voraussetzung.

$$\begin{aligned} \sphericalangle b &= b' \text{ (Fig. 25 oder 26.)} \\ ac &= a'c' \\ bc &= b'c' \\ ac &> cb \end{aligned}$$

Beweis.

Man lege die Dreiecke so aneinander, dass die gleichen Seiten  $ac$  und  $a'c'$  sich decken, die Dreiecke jedoch nach verschie-

\*) Durch die Voraussetzung  $ac > cb$  schliesst man den Fall aus, in welchem die Dreiecke gleichseitig sind, weil derselbe leicht für sich bewiesen werden kann. Die Winkel der Dreiecke sind nämlich für diesen Fall alle gleich und die Behauptung kann nach § 17 a geschlossen werden.



denen Seiten fallen. Die entstandene Figur ist dann entweder ein Viereck (Fig. 25) oder ein Dreieck (Fig. 26). In jedem Falle jedoch ist der Punkt  $(a, a')$  ein Eckpunkt der entstandenen Figur, weil die Winkel bei  $a$  und  $a'$  nach Voraussetzung 4) und 20 a spitz sein müssen und deshalb der Punkt  $(a, a')$  nicht mit den Punkten  $b$  und  $b'$  in eine Gerade fallen kann.

Fig. 25.

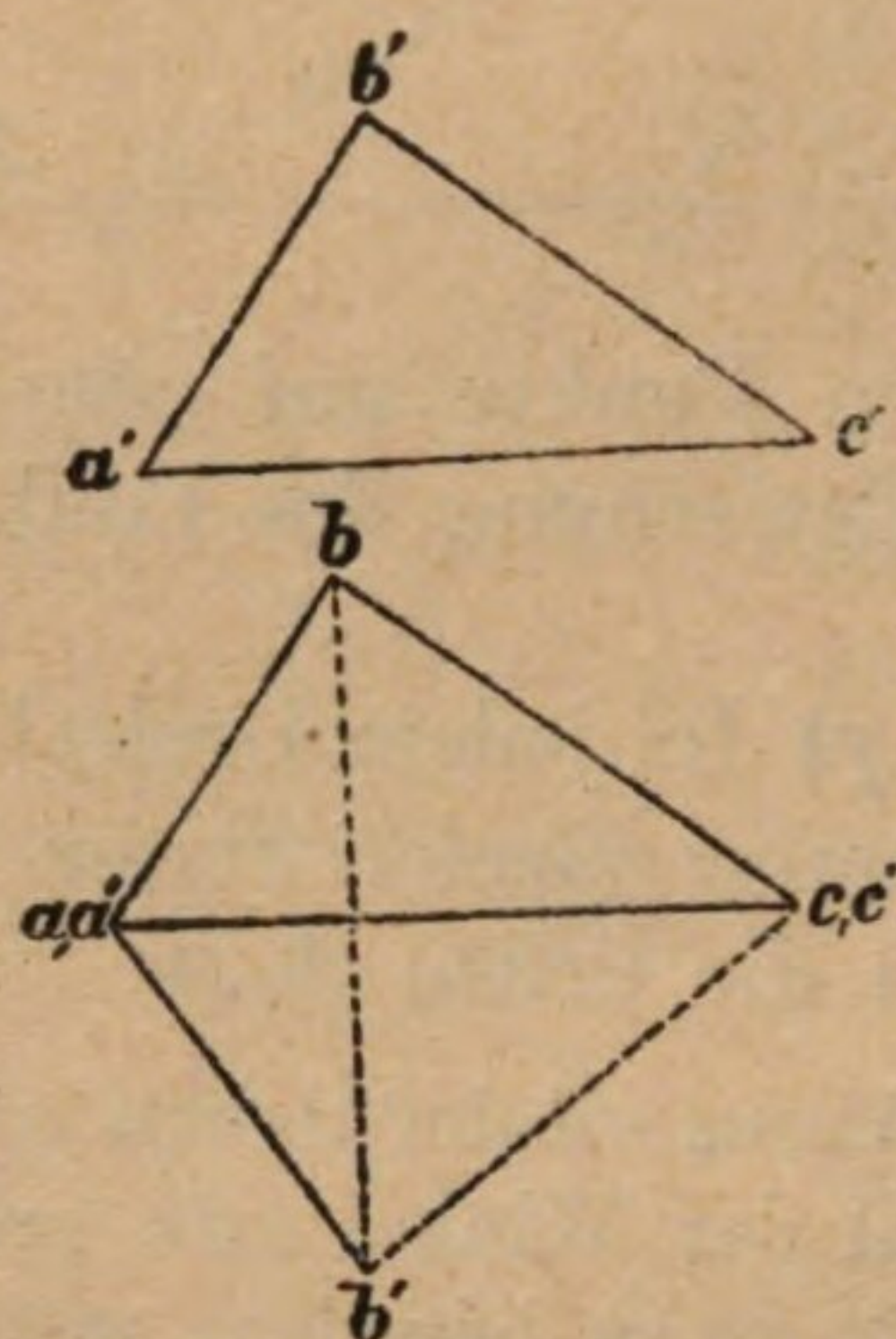
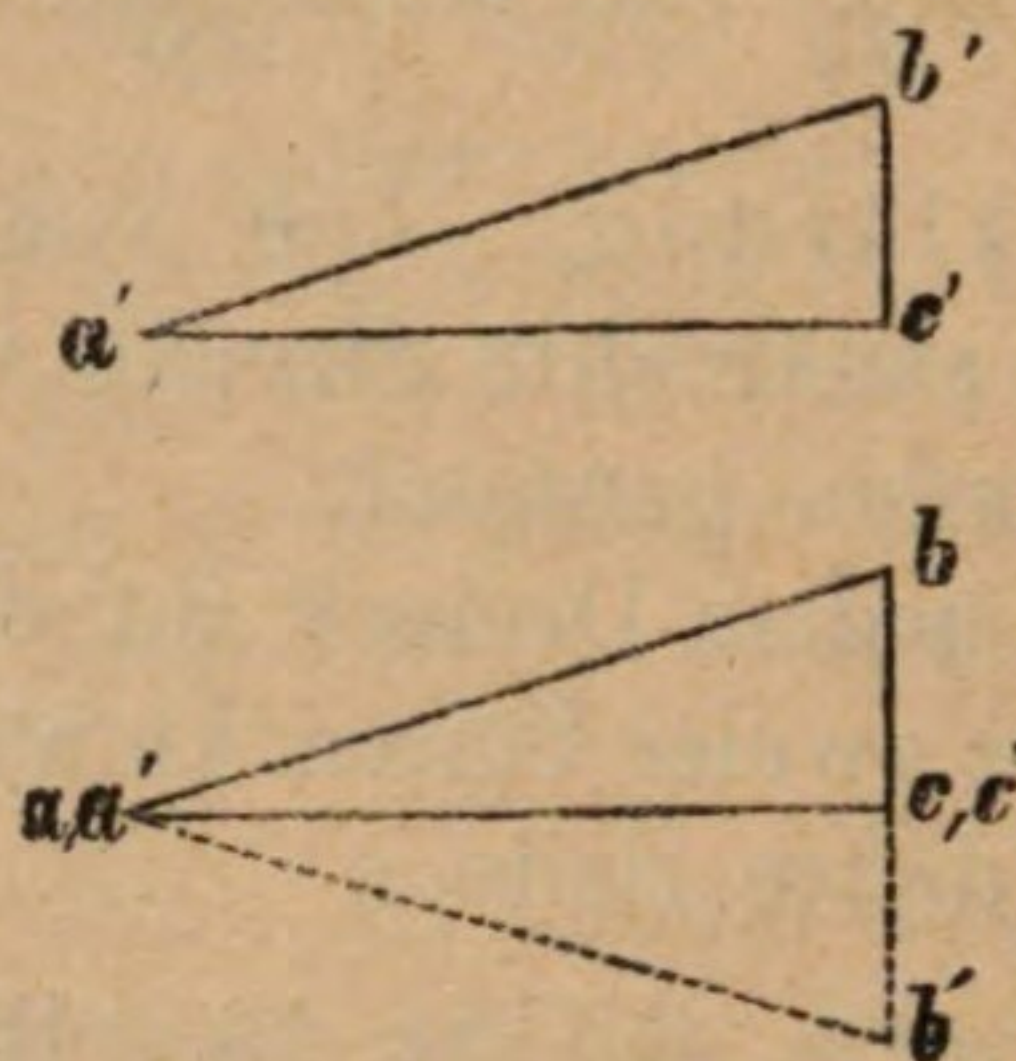


Fig. 26.



1. Fall. Die entstandene Figur ist ein Dreieck. (Fig. 26.)  
 Dann folgt aus Voraussetzung. 1) und 18 b, dass  $\angle b = b'$  und die Congruenz der Dreiecke kann nach 17 a geschlossen werden.

Dann folgt aus Voraussetzung. 1) und 18  $\beta$ , dass  $ab = a'b'$  und die Congruenz der Dreiecke kann nach 17 a geschlossen werden.

2. Fall. Die entstandene Figur ist ein Viereck. (Fig. 25.)

Die Diagonale  $bb'$  bildet mit den Seiten des Vierecks zwei gleichschenklige Dreiecke und in jedem derselben sind nach § 18 b die an der Diagonale  $bb'$  liegenden Winkel gleich. Hieraus schliesst man nach § 4, III. die Gleichheit der Winkel  $abc$  und  $a'b'c'$ .

Die Congruenz der Dreiecke  $abc$  und  $a'b'c'$  kann nunmehr nach § 17 a geschlossen werden.

Die Diagonale  $bb'$  bildet mit den Seiten  $bc$  und  $b'c'$  des Vierecks ein gleichschenkliges Dreieck, woraus nach § 18 b die Gleichheit der Winkel  $cbb'$  und  $c'b'b$  folgt. Hieraus und aus Voraussetzung 1) schliesst man nach § 4, IV. die Gleichheit der Winkel  $abb'$  und  $a'b'b$  und nach § 18  $\beta$  die Gleichheit der Seiten  $ab$  und  $a'b'$ .

Die Congruenz der Dreiecke  $abc$  und  $a'b'c'$  kann nunmehr nach § 17 a geschlossen werden.

b) Zusatz: Rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn die Hypotenuse und eine Kathete gleich sind.



Der Beweis folgt aus Lehrsatz  $\alpha$ ) unter der Bemerkung, dass die Hypotenuse grösser ist als die Kathete.

### Aufgaben.

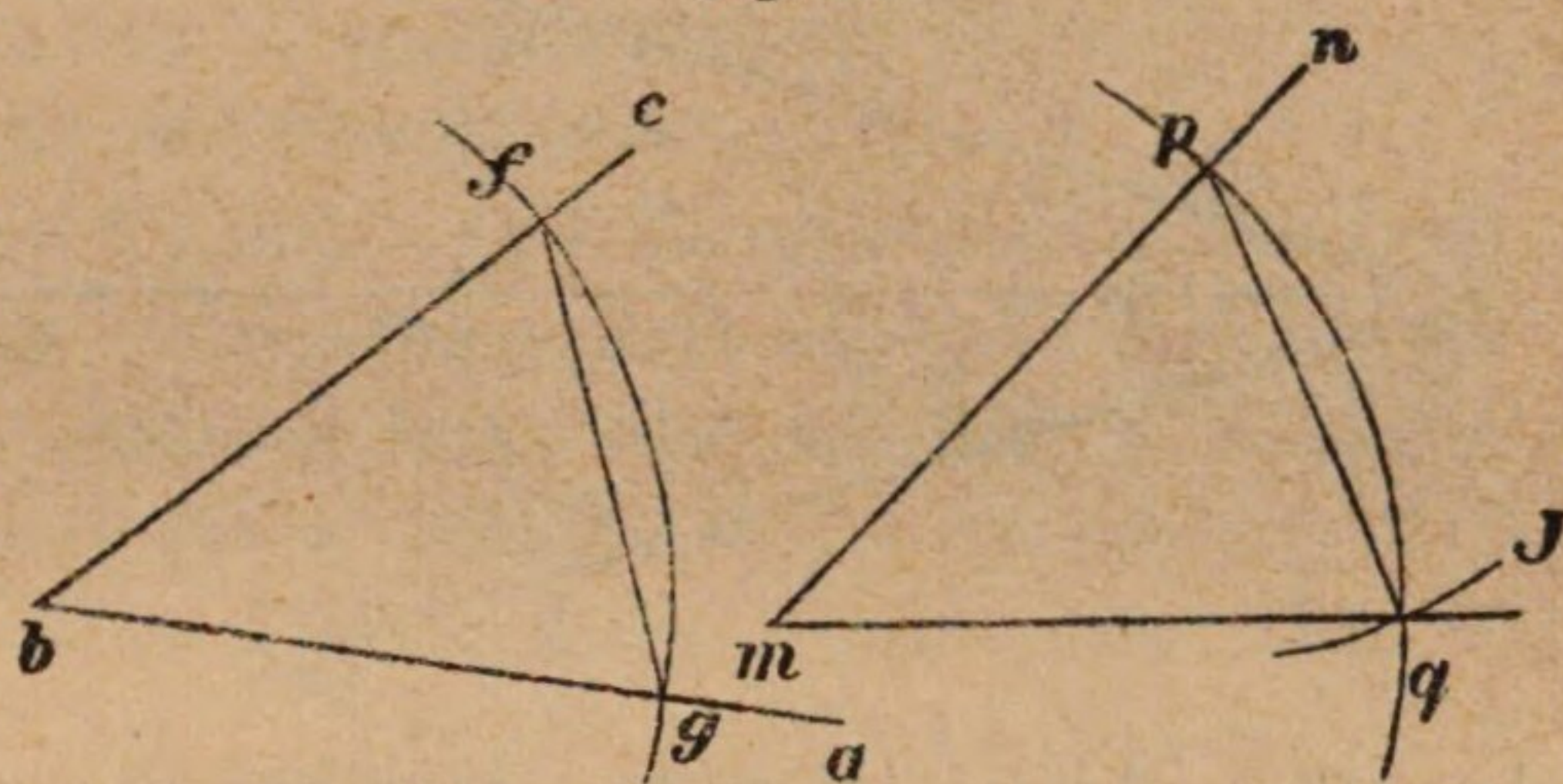
§ 22.

a) In einem gegebenen Punkte an eine Gerade ein Dreieck anzuzeichnen, welches einem gegebenen Dreieck nach § 21 a congruent ist.

Auflösung. Man trage von dem gegebenen Punkte aus eine Seite auf der Geraden ab. Mit den beiden andern Seiten als Radien beschreibe man um die Endpunkte der erhaltenen Strecke zwei Kreise. Da diese beide durch die Spitze des Dreiecks gehen müssen, so bestimmen sie dieselbe.

b) In einem gegebenen Punkte  $m$ , Fig. 27, an eine Gerade  $mn$  einen Winkel anzuzeichnen, welcher einem gegebenen Winkel  $cba$  gleich ist.

Fig. 27.

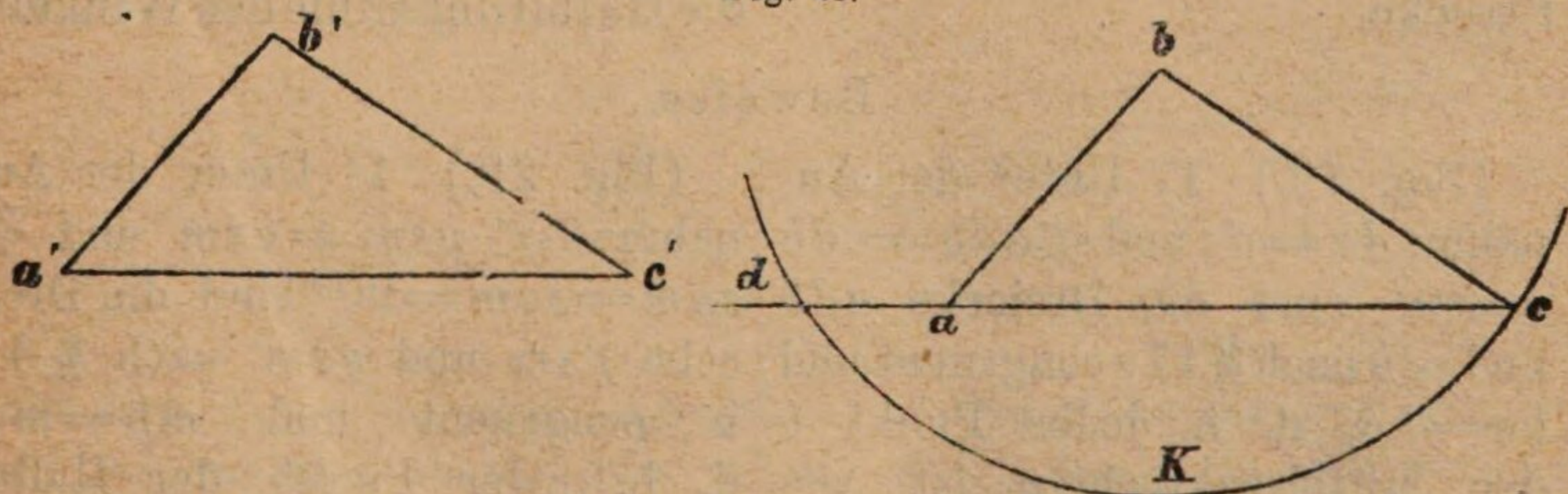


Auflösung. Beschreibe mit gleichen Radien um  $b$  und  $m$  Kreisbogen. Trage mit dem Zirkel die Sehne  $fg$  in den um  $m$  beschriebenen Bogen von  $p$  aus hinein, so dass  $pq = fg$ . Aus der Congruenz der Dreiecke  $bfg$  und  $mpq$  (§ 21 a) folgt nun die Gleichheit der Winkel  $b$  und  $m$ .

c) In einem gegebenen Punkte einer Geraden ein Dreieck anzuzeichnen, welches einem gegebenen Dreieck 1) nach § 17 a, 2) nach § 17  $\alpha$ , 3) nach § 21  $\alpha$  congruent ist.

Auflösung. Die ersten beiden Fälle sind sehr leicht. In dem letzten seien von dem Dreieck  $a'b'c'$  (Fig. 28) die Seiten  $b'c'$ ,  $b'a'$

Fig. 28.



und der Winkel  $a'$  gegeben. Zugleich sei  $b'c'$  grösser als  $b'a'$ .

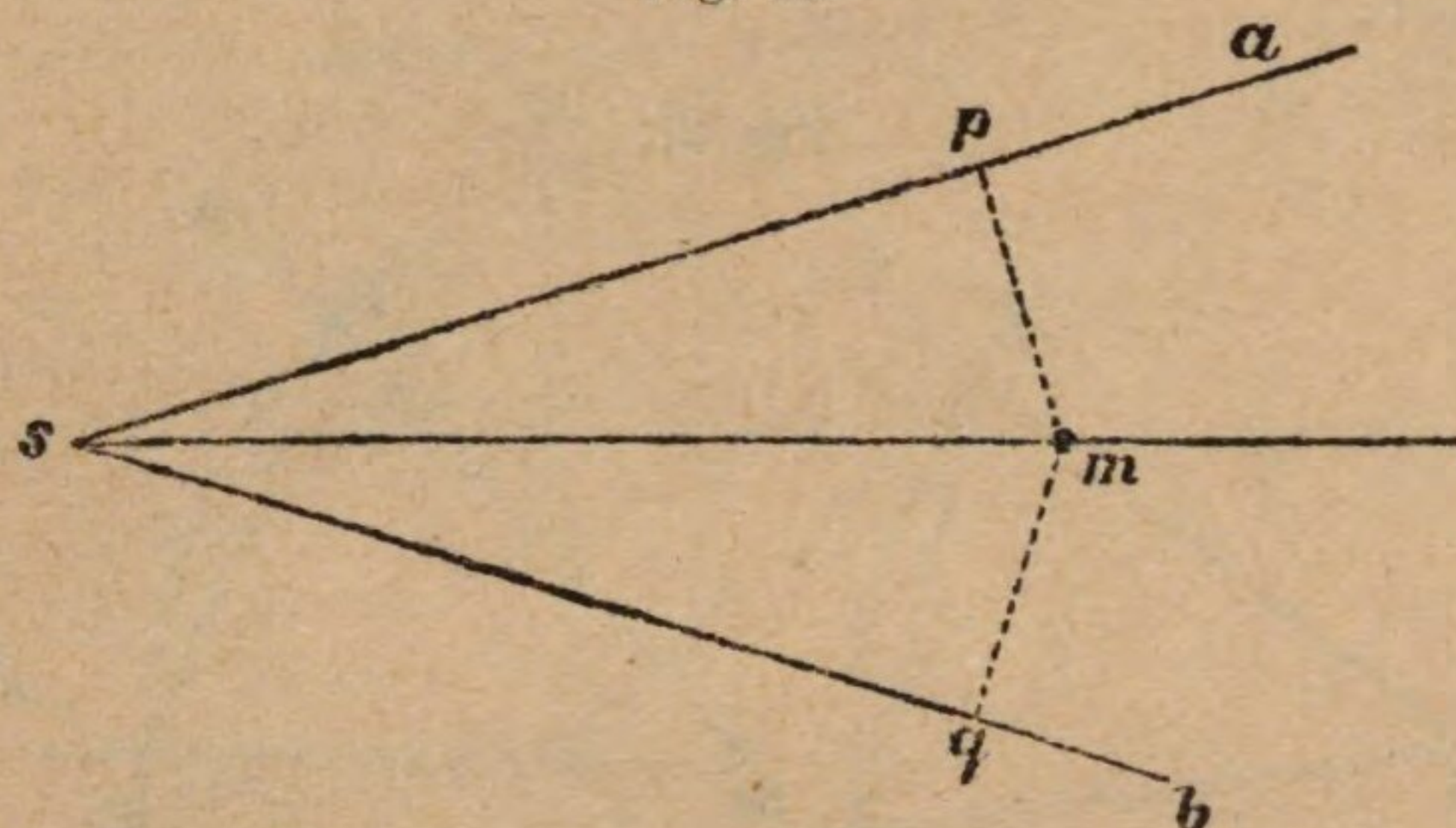


Man trage in dem gegebenen Punkte  $a$  den Winkel  $\alpha'$  an die Gerade an und mache  $ab = a'b'$ . Mit  $b'c'$  als Radius beschreibe man um  $b$  einen Kreis, Der gesuchte Eckpunkt muss sowohl auf dem zweiten Schenkel des Winkels  $\alpha$  als auch auf dem beschriebenen Kreise liegen und wird darnach durch ihren Schnittpunkt bestimmt.

### § 23. Der geometrische Ort.

Erklärung. Es gibt unendlich viele Punkte der Ebene, welche eine gegebene Bedingung erfüllen. Die Gesamtheit derselben bildet einen geometrischen Ort. Derselbe kann aus

Fig. 29.



einer geraden oder krummen Linie in ihrer ganzen Ausdehnung oder aus Stücken solcher Linien bestehen. Wenn die Angabe eines geometrischen Ortes vollständig ist, so existiren ausserhalb

desselben keine Punkte, welche die gegebene Bedingung erfüllen. Zwei Bedingungen führen auf zwei geometrische Oerter. Diejenigen Punkte, welche beiden Oertern gemeinschaftlich sind, genügen den beiden Bedingungen zugleich.

a) Es gibt unendlich viele Punkte, welche von den Endpunkten einer Strecke gleiche Entfernung haben. Der geometrische Ort dieser Punkte ist die Mittelsenkrechte der Strecke.

$\alpha$ ) Es gibt unendlich viele Punkte innerhalb eines Winkels, welche von den Schenkeln desselben gleiche Entfernung haben. Der geometrische Ort dieser Punkte ist die Halbierungslinie des Winkels.

#### Beweise.

(Fig. 19.) 1) Unter der Annahme  $da = dc$  und  $\angle adb = \angle cdb = 90^\circ$  sind die Dreiecke  $adb$  und  $cdb$  nach § 17 a congruent und  $ba = bc$ , d. h. jeder Punkt  $b$  der Mittelsenkrechten ist von den Endpunkten  $a$  und  $c$  gleich weit entfernt.

(Fig. 29.) 1) Unter der Annahme  $\angle psm = \angle qsm$  und  $\angle spm = \angle sqm = 90^\circ$  sind die Dreiecke  $psm$  und  $qsm$  nach § 17 b congruent und  $mp = mq$ , d. h. jeder Punkt der Halbierungslinie des Winkels  $asb$  ist von  $sa$  und  $sb$  gleich weit entfernt.



2) Unter der Voraussetzung  $ba = bc$  ist  $abc$  ein gleichschenkliges Dreieck und die Mittelsenkrechte der Grundlinie  $ac$  muss nach § 18 d durch  $b$  gehen, d. h. alle Punkte, welche von  $a$  und  $c$  gleiche Entfernung haben, liegen auf der Mittelsenkrechten von  $ac$ .

Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

Anmerkung. Zwei Punkte werden in Bezug auf die Mittelsenkrechte ihrer Strecke symmetrisch genannt. Der eine dieser Punkte heisst auch der Gegenpunkt oder Spiegelpunkt des andern in Bezug auf die Mittelsenkrechte.

b) Es gibt nur einen Punkt, der von den Ecken eines Dreiecks gleichweit entfernt ist. In demselben schneiden sich die Mittelsenkrechten der drei Seiten.

2) Unter der Voraussetzung  $mp = mq$  und  $\sphericalangle spm = \sphericalangle sqm = 90^\circ$  sind die Dreiecke  $psm$  und  $qsm$  nach § 21 b congruent und  $\sphericalangle psm = \sphericalangle qsm$ , d. h. jeder Punkt, welcher von  $sa$  und  $sb$  gleiche Entfernung hat, liegt auf der Halbirungslinie des Winkels  $asb$ .

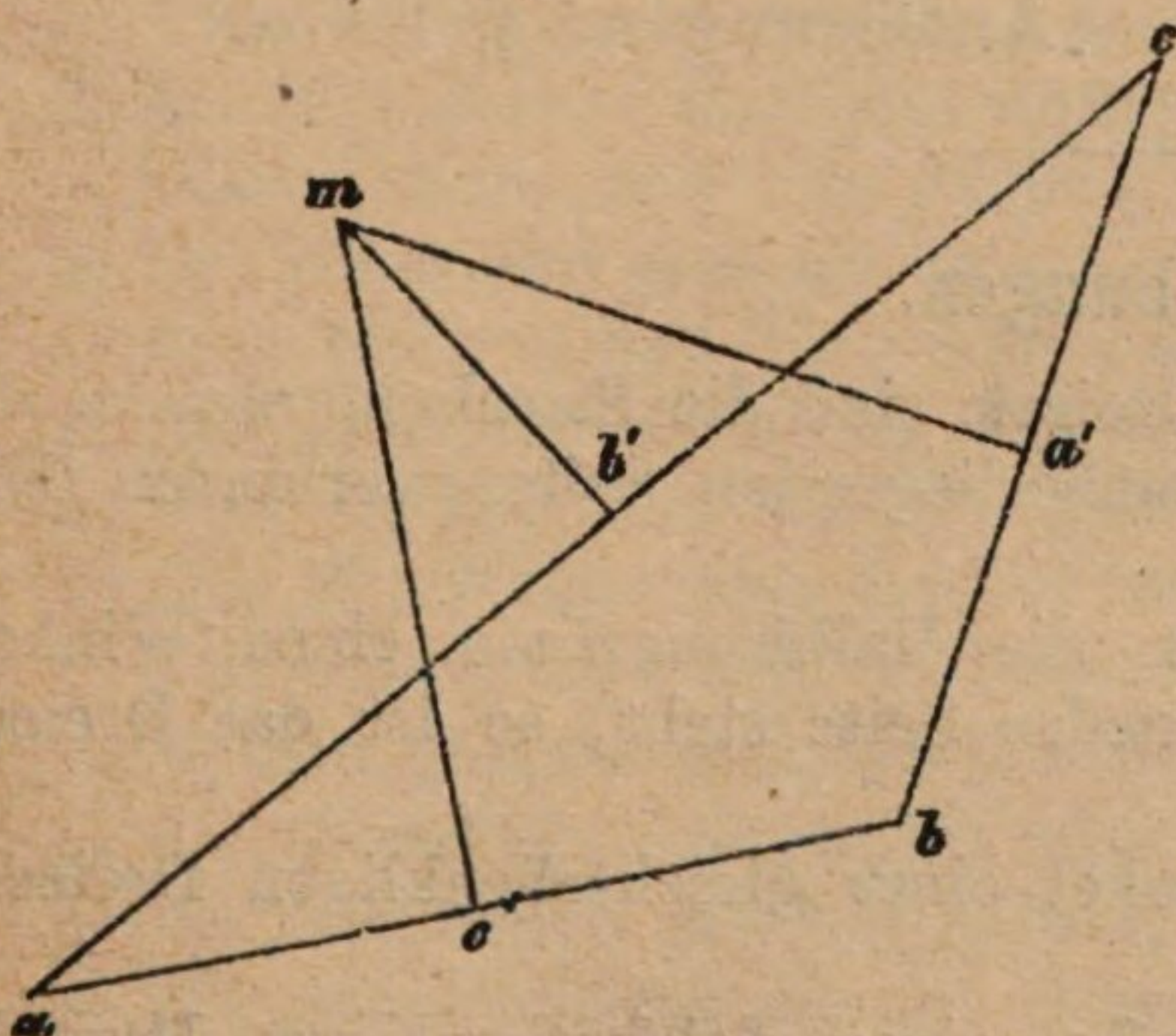
Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

$\beta$ ) Es gibt nur einen Punkt innerhalb eines Dreiecks, welcher von den Seiten desselben gleichweit entfernt ist. In demselben schneiden sich die Halbirungslinien der drei Winkel.

Beweise.

(Fig. 30.) Für den Schnittpunkt  $m$  zweier Mittelsenkrechten, z. B. von  $ab$  und  $bc$  er-

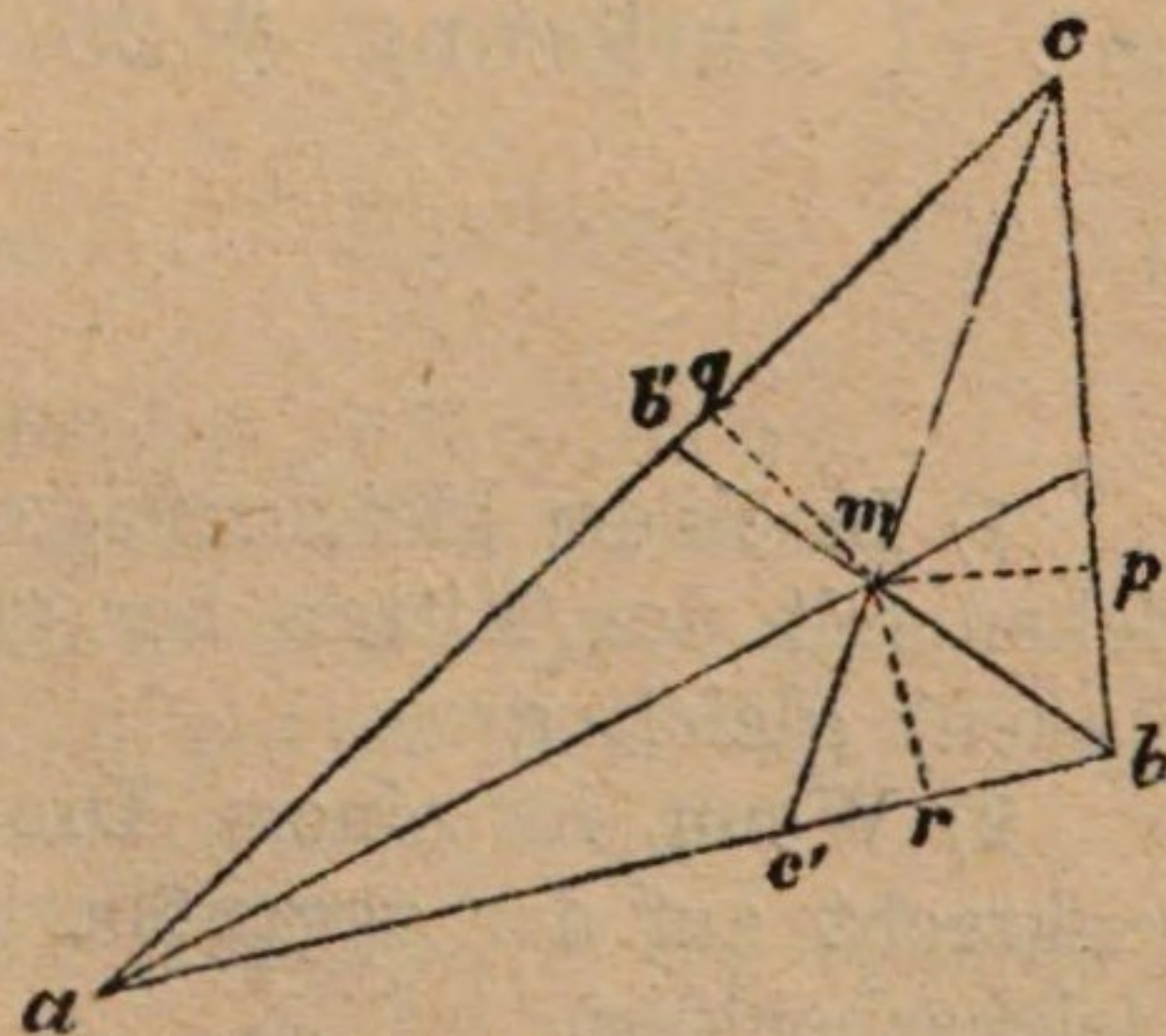
Fig. 30.



gibt sich  $ma = mb$  und  $mb = mc$  (a), woraus folgt, dass  $m$  von  $a$ ,  $b$  und  $c$  gleiche Entfernung hat.

(Fig 31.) Für den Schnittpunkt  $m$  der Halbirungslinien zweier Winkel, z. B. der Winkel

Fig. 31.



bei  $a$  und  $b$  ergibt sich  $mq = mr$  und  $mr = mp$  ( $\alpha$ ), woraus folgt, dass  $m$  von den Seiten des Dreiecks gleiche Entfernung hat,



Ein zweiter Punkt dieser Art kann nicht existiren, weil derselbe zufolge  $a)$  ebenfalls auf den Mittelsenkrechten von  $ab$  und  $bc$  zugleich liegen müsste (§ 2 b). Dass die Mittelsenkrechte von  $ca$  ebenfalls durch  $m$  geht, folgt aus  $a)$ .

**c)** Kein Punkt der Ebene kann von drei Punkten einer Geraden gleiche Entfernung haben.

Ein zweiter Punkt dieser Art kann nicht existiren, weil derselbe zufolge  $\alpha)$  ebenfalls auf den Halbirungslinien der Winkel  $a$  und  $b$  zugleich liegen müsste (§ 2 b). Dass die Halbirungslinie des Winkels  $c$  ebenfalls durch  $m$  geht, folgt aus  $\alpha)$ .

**$\gamma)$**  Kein Punkt der Ebene kann von drei Geraden eines Punktes gleiche Entfernung haben.

#### Beweise.

Ein Punkt, welcher von 3 Punkten  $a, b, c$  einer Geraden gleiche Entfernung hat, müsste auf den Mittelsenkrechten der Strecken  $ab, ac, bc$  liegen, was nach § 12 c unmöglich ist.

Ein Punkt, welcher von 3 Geraden  $sa, sb, sc$  gleiche Entfernung hat, müsste auf den Halbirungslinien der 3 Winkel  $asb, bsc, asc$  liegen, was unmöglich ist, weil diese Halbirungslinien nur den Punkt  $s$  gemeinsam haben.

#### Aufgaben.

**d)** Einen Punkt zu finden, welcher von 3 gegebenen Punkten gleiche Entfernung hat. (1 Auflösung. § 23 a.)

**$\delta)$**  Einen Punkt zu finden, welcher von 3 gegebenen Geraden gleiche Entfernung hat. (4 Auflösungen. § 23  $\alpha$ .)

### § 24.

#### Uebungen.

1) In einem gleichseitigen Dreieck sind die Strecken, welche die Ecken mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbinden (Medianen) gleich gross.

2) Wenn in einem Dreieck die Halbirungslinie eines Winkels senkrecht auf der gegenüberliegenden Seite steht, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

3) Die Höhen auf die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich gross.

4) Die Höhen auf die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, welcher auf der Mittelsenkrechten der Grundlinie gelegen ist.

5) Wenn man durch den Schnittpunkt der Halbirungslinien zweier Dreieckswinkel eine Parallele mit der eingeschlossenen Seite zieht, so



ist dieselbe so gross als die Summe der nicht parallelen Seiten in dem abgeschnittenen Trapeze.

6) Verlängert man in einem gleichschenkligen Dreieck einen Schenkel um sich selbst, so liegt der Endpunkt der Verlängerung senkrecht über dem einen Endpunkte der Grundlinie.

7) In einem Endpunkte einer Strecke eine Senkrechte auf dieselbe zu errichten, ohne die Strecke zu verlängern.

8) Einen Winkel zu zeichnen, welcher gleich ist  $R$ ,  $\frac{1}{2} R$ ,  $\frac{1}{3} R$ ,  $\frac{1}{4} R$ ,  $\frac{5}{6} R$ .

9) Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete halb so gross ist als die Hypotenuse, so liegt ihr ein Winkel von  $30^\circ$  gegenüber.

10) Durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Gerade so zu ziehen, dass sie von beiden Schenkeln gleiche Stücke abschneidet.

11) In einem Viereck mit hohlen Winkeln ist die Summe der Diagonalen  $\alpha$ ) kleiner als die Summe der Seiten,  $\beta$ ) grösser als die halbe Summe der Seiten.

12) Die Summe der Strecken, welche einen Punkt im Innern des Dreiecks mit seinen Ecken verbindet, ist grösser als die halbe Summe der Seiten.

13) Wenn in einem Dreieck zwei Medianen (§ 24, 1) einander gleich sind, so ist dasselbe gleichschenkl.

14) Wenn in einem Dreieck zwei Höhen gleich sind, so ist dasselbe gleichschenkl.

15) Durch einen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden zu ziehen (§ 9 b § 22 b).

16) Zwei Gerade können nicht bis zu ihrem Durchschnitt verlängert werden. Man soll  $\alpha$ ) ihren Winkel bestimmen,  $\beta$ ) die Halbierungslinie des Winkels zeichnen.

17) Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist:

$\alpha$ ) Eine Kathete und der ihr gegenüberliegende Winkel.

$\beta$ ) Die Hypotenuse und eine Kathete.

$\gamma$ ) Eine Kathete und ihre Projection auf die Hypotenuse.

$\delta$ ) Die Höhe und eine Kathete.

$\epsilon$ ) Eine Kathete und die Summe der beiden andern Seiten.

$\zeta$ ) Die Hypotenuse und die Summe der beiden Katheten.

$\eta$ ) Eine Kathete und die Differenz der beiden andern Seiten.

$\theta$ ) Die Hypotenuse und die Differenz der beiden Katheten.

$\kappa$ ) Die Hypotenuse und die Differenz der spitzen Winkel.

18) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist

$\alpha$ ) die Grundlinie und der Winkel an derselben.

$\beta$ ) Die Grundlinie und der Winkel an der Spitze.

$\gamma$ ) Ein Schenkel und die zur Grundlinie gehörige Höhe.

$\delta$ ) Die Höhe und der Winkel an der Spitze.

$\epsilon$ ) Die Grundlinie und die dem Schenkelpaare zugehörige Höhe.

$\zeta$ ) Die Summe eines Schenkels und der Grundlinie und der Winkel an der letzteren.

$\eta$ ) Der Umrang und die Höhe.



19) Ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck aus seiner Höhe zu zeichnen.

20) Ein gleichseitiges Dreieck aus seinem Umringe zu zeichnen. (Eine gegebene Strecke in 3 gleiche Theile zu theilen.)

21) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn gegeben ist

$\alpha$ ) Die Höhe und die beiden anliegenden Seiten.

$\beta$ ) Eine Seite, ein anliegender Winkel und die aus demselben auf die gegenüberliegende Seite gefällte Senkrechte.

$\gamma$ ) Eine Seite, der ihr gegenüberliegende Winkel und die Summe der beiden andern Seiten.

$\delta$ ) Der Umring und die Winkel an der Grundlinie.

22) In einer gegebenen Geraden einen Punkt zu suchen, welcher

$\alpha$ ) von zwei gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist,  $\beta$ ) von zwei gegebenen Geraden gleichweit entfernt ist.

23) In einer gegebenen Geraden einen Punkt  $m$  zu suchen, so dass die von ihm nach zwei gegebenen Punkten  $a$  und  $b$  gezogenen Strecken mit der Geraden gleiche Winkel bilden.

24) In dieser Geraden einen Punkt  $m$  so zu bestimmen, dass  $ma + mb$  so klein als möglich ist.

25) Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und der beiden Aussenwinkel, welche der gegenüberliegenden Seite anliegen, schneiden sich in einem Punkte.

## II. Abschnitt.

### Von den Parallelogrammen.

#### § 25. Lehrsätze über die Parallelogramme.

a) Ein Parallelogramm wird durch jede Diagonale in zwei congruente Dreiecke von gleichem Sinne getheilt. (§ 9  $\alpha$ . § 17  $\alpha$ .)

b) In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich. (§ 25 a, § 16  $\beta$ .)

$\alpha$ ) Jedes Dreieck kann durch ein congruentes Dreieck von gleichem Sinne zu einem Parallelogramme ergänzt werden. (§ 16 e.)

$\beta$ ) 1) Wenn in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

2) Wenn in einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Beweis zu  $\beta$ ). Man theile das Viereck durch eine Diagonale in 2 Dreiecke, deren Congruenz im Falle 1) nach § 21 a



und im Falle 2) nach § 17 a geschlossen werden kann. Hieraus ergibt sich die Gleichheit der Wechselwinkel und der Parallelismus gegenüberliegender Seiten.

**Zusätze.** **c)** Alle Senkrechten zwischen zwei Parallelen sind einander gleich. Die gemeinsame Länge derselben wird der Abstand der Parallelen genannt.

**γ)** Alle Punkte, welche auf derselben Seite einer Geraden gleichen Abstand von ihr haben, liegen in einer parallelen Geraden.

**Anmerkung.** Aus diesen beiden Zusätzen ergibt sich: Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer Geraden gleiche Entfernung haben, ist durch zwei Gerade gebildet, welche mit der gegebenen parallel sind.

**d)** Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander.

**δ)** Wenn die Diagonalen eines Vierecks einander halbiren, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

**Beweise.** (Fig. 33.) **d)** Man schliesse aus der Gleichheit der Seiten  $ad$  und  $bc$  (b) und aus der Gleichheit der Wechselwinkel die Congruenz der Dreiecke  $amd$  und  $bmc$  nach § 17 α, woraus sich die Behauptung ergibt.

**δ)** Man erweise die Congruenz der Dreiecke  $amd$  und  $bmc$  nach § 17 a. Hieraus ergibt sich die Gleichheit der Wechselwinkel und der Parallelismus von  $ad$  und  $bc$ . Ebenso wird der Parallelismus von  $ab$  und  $dc$  bewiesen.

Fig. 32.

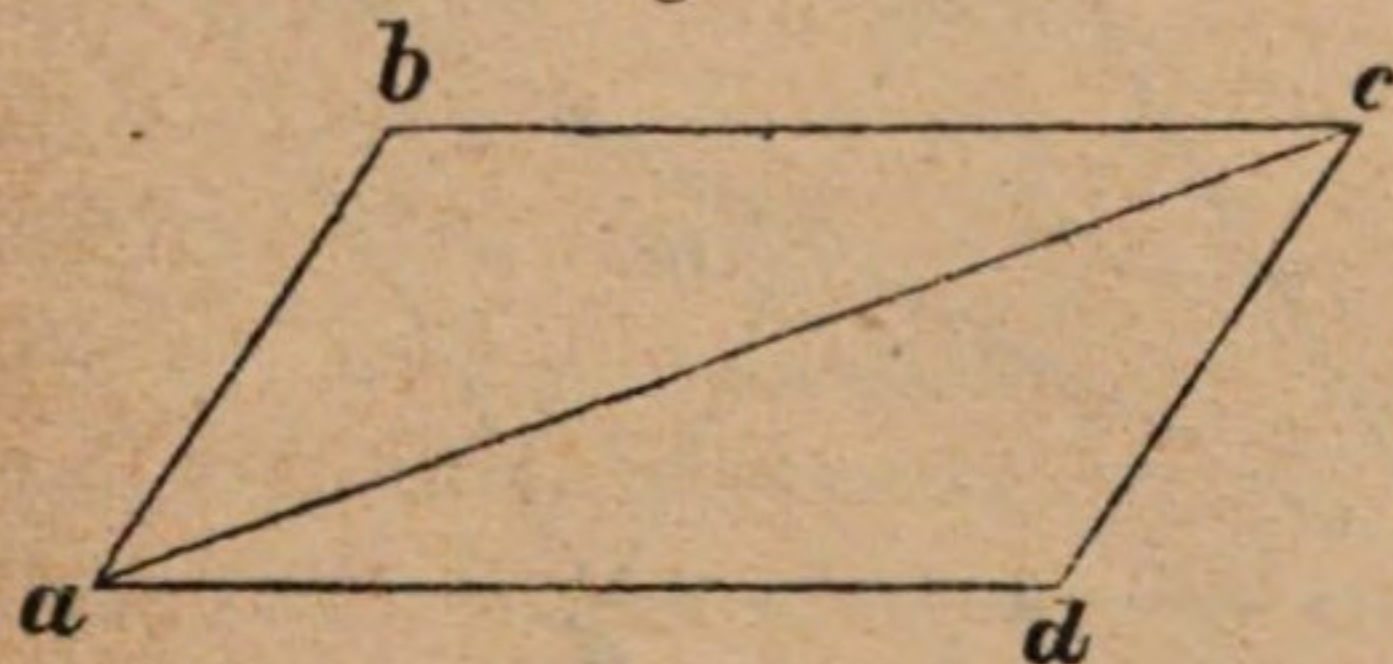
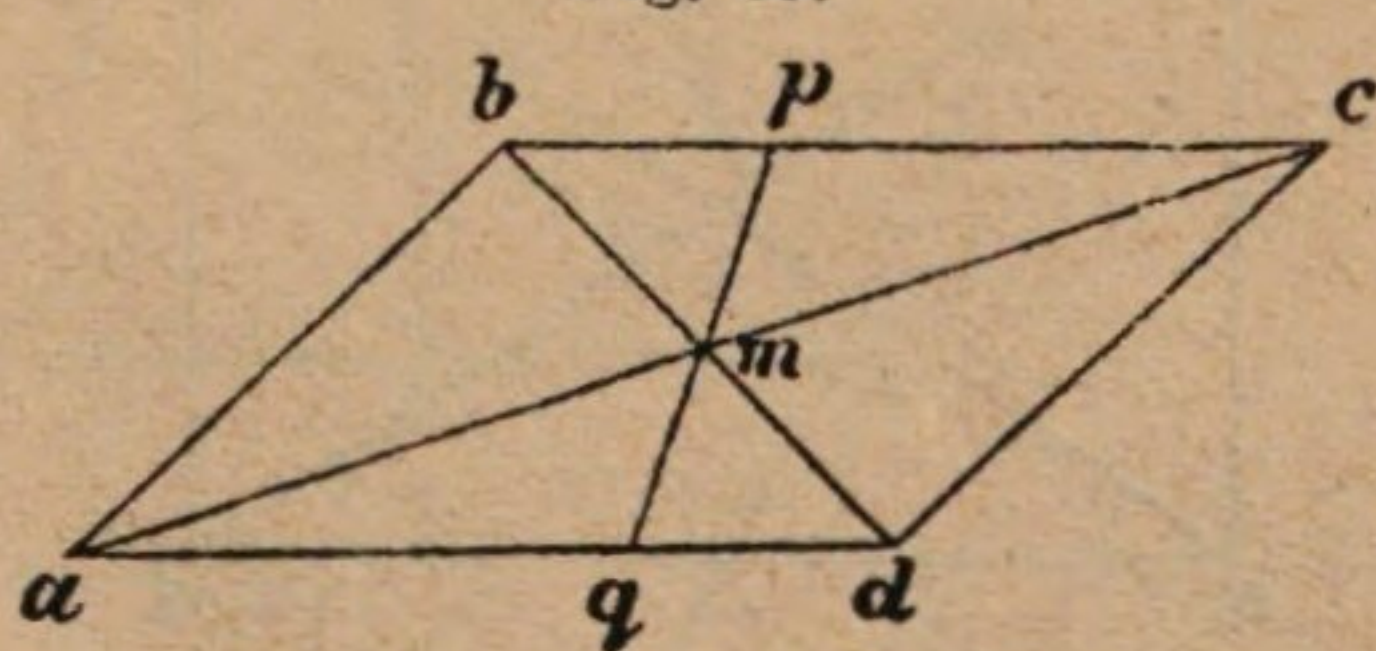


Fig. 33.



**e) Zusatz.** Der Schnittpunkt der Diagonalen ist Mittelpunkt des Parallelogramms. Jede durch ihn gehende Gerade (Durchmesser) theilt das Parallelogramm in zwei congruente Figuren. Jeder Durchmesser wird in dem Mittelpunkte halbirt.

**Erklärung.** Zwei Punkte  $a$  und  $c$  (Fig. 33) nennt man symmetrisch in Bezug auf die Mitte  $m$  ihres Abstandes. Man sagt auch, der eine dieser Punkte  $c$  sei der Gegenpunkt von



$a$  in Bezug auf  $m$ . — Zu jedem Punkt  $p$  auf dem Umringe des Parallelogramms gehört also ein anderer Punkt  $q$  desselben, welcher sein Gegenpunkt in Bezug auf den Mittelpunkt  $m$  ist.

### § 26. Aufgaben.

a) (Fig. 32.) Ueber den Strecken  $ba$  und  $bc$  ein Parallelogramm zu construiren.

Auflösung. Man ziehe mit  $ab$  und  $cb$  als Radien um die Punkte  $c$  und  $a$  zwei Kreise. Sie schneiden sich in  $b$  und in dem gesuchten vierten Eckpunkt des Parallelogrammes. Beweis nach § 25  $\beta$ .

b) Durch einen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden zu ziehen.

Auflösung Fig. 35. Um einen beliebigen Punkt  $a$  der Geraden ziehe man einen Kreis, welcher durch den gegebenen Punkt  $b$  geht und die Gerade in  $d$  schneiden möge. Um  $b$  und  $d$  zeichne man mit demselben Radius zwei Kreise, welche sich in  $a$  und in einem Punkt  $c$  der gesuchten Parallelen schneiden müssen. (§ 25  $\beta$ .)

### § 27. Lehrsätze über die besonderen Parallelogramme.

a) Wenn in einem Parallelogramme ein Winkel recht ist,  $\alpha$ ) Wenn in einem Parallelogramme zwei anliegende Seiten

Fig. 34.

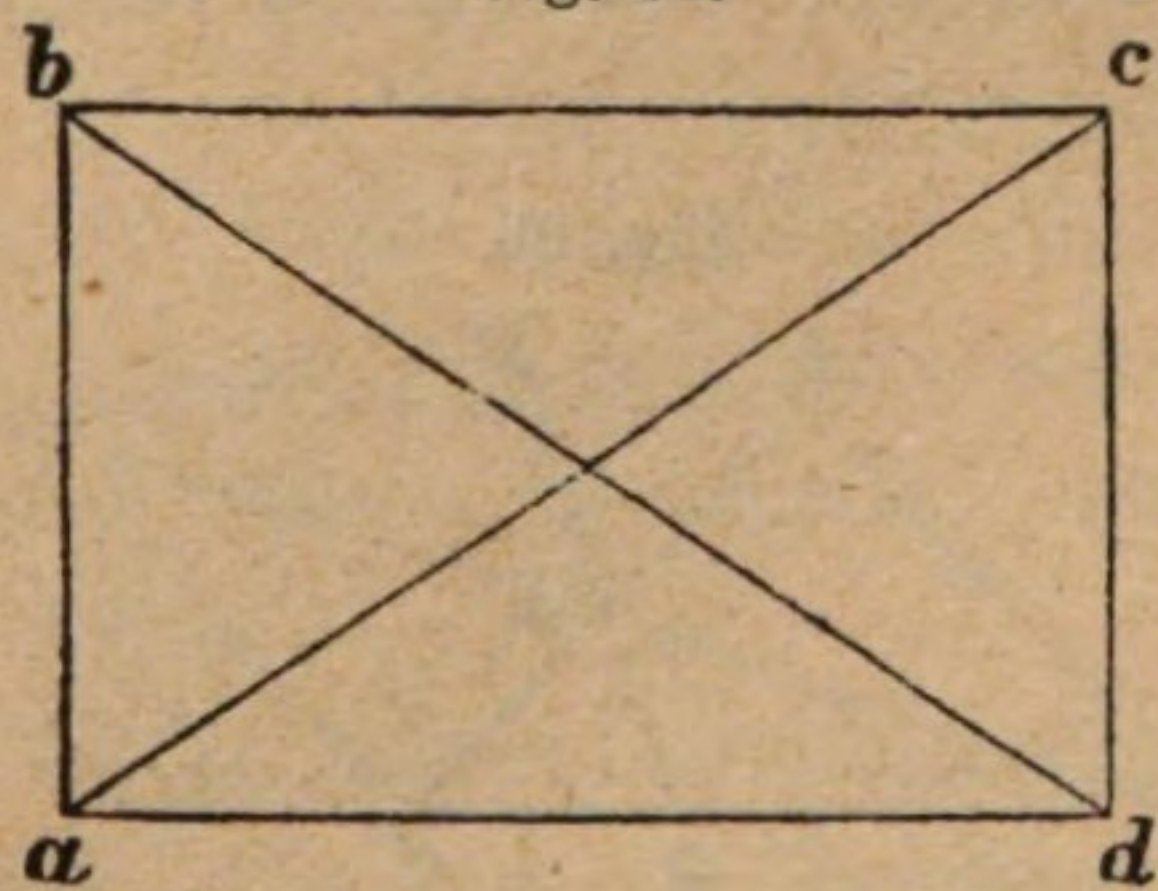
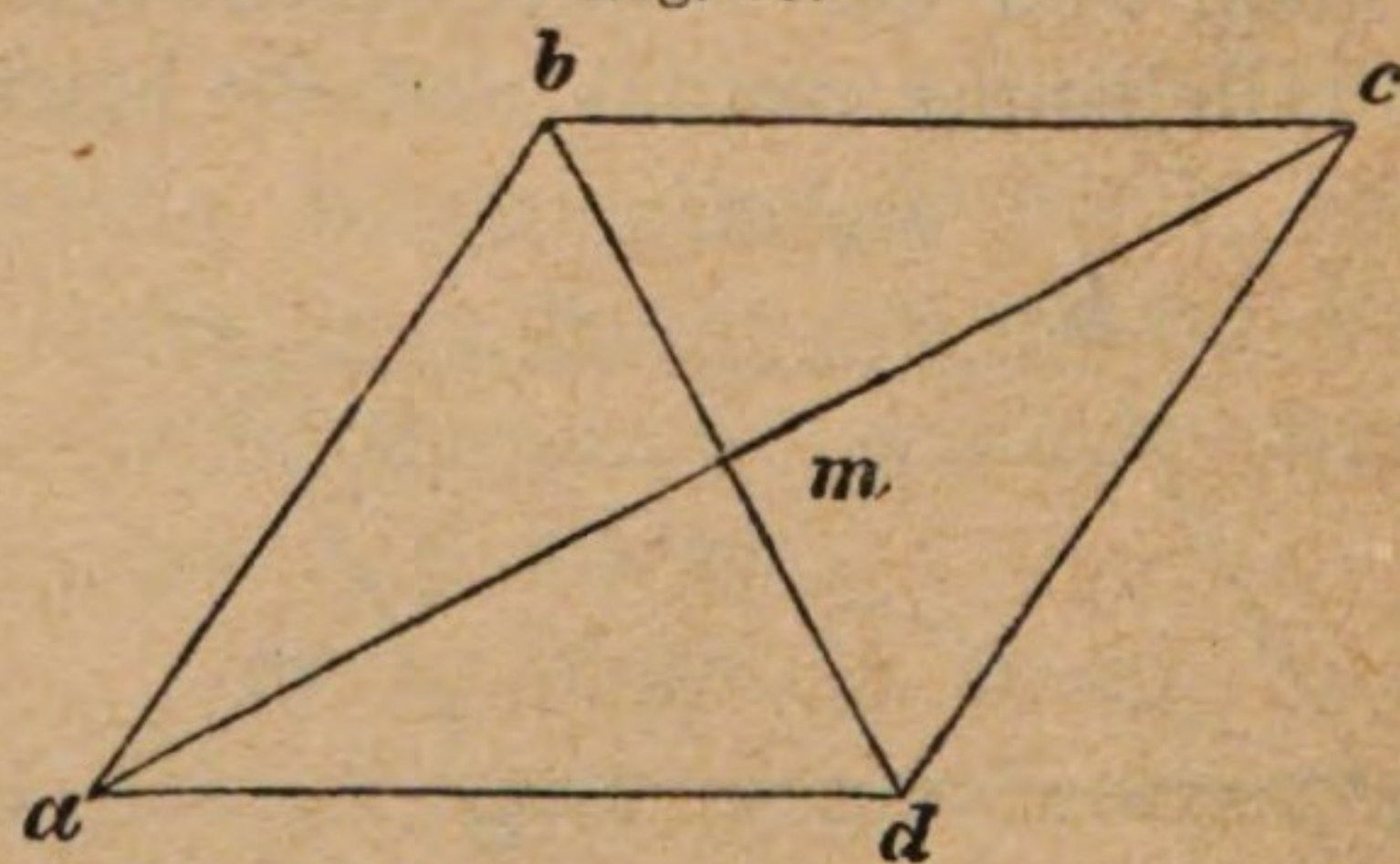


Fig. 35.



so sind alle Winkel recht und das Parallelogramm heisst Rechteck (Fig. 34.)

(Zum Beweis § 9  $\gamma$ .)

b) In jedem Rechteck sind die Diagonalen gleich gross. Die Ecken des Rechtecks sind

einander gleich sind, so sind alle Seiten gleich und das Parallelogramm heisst Rhombus. (Fig. 35.)

(Zum Beweis § 25 b.)

$\beta$ ) In einem Rhombus ist jede Diagonale die Mittelsenkrechte der andern. Die Diago-



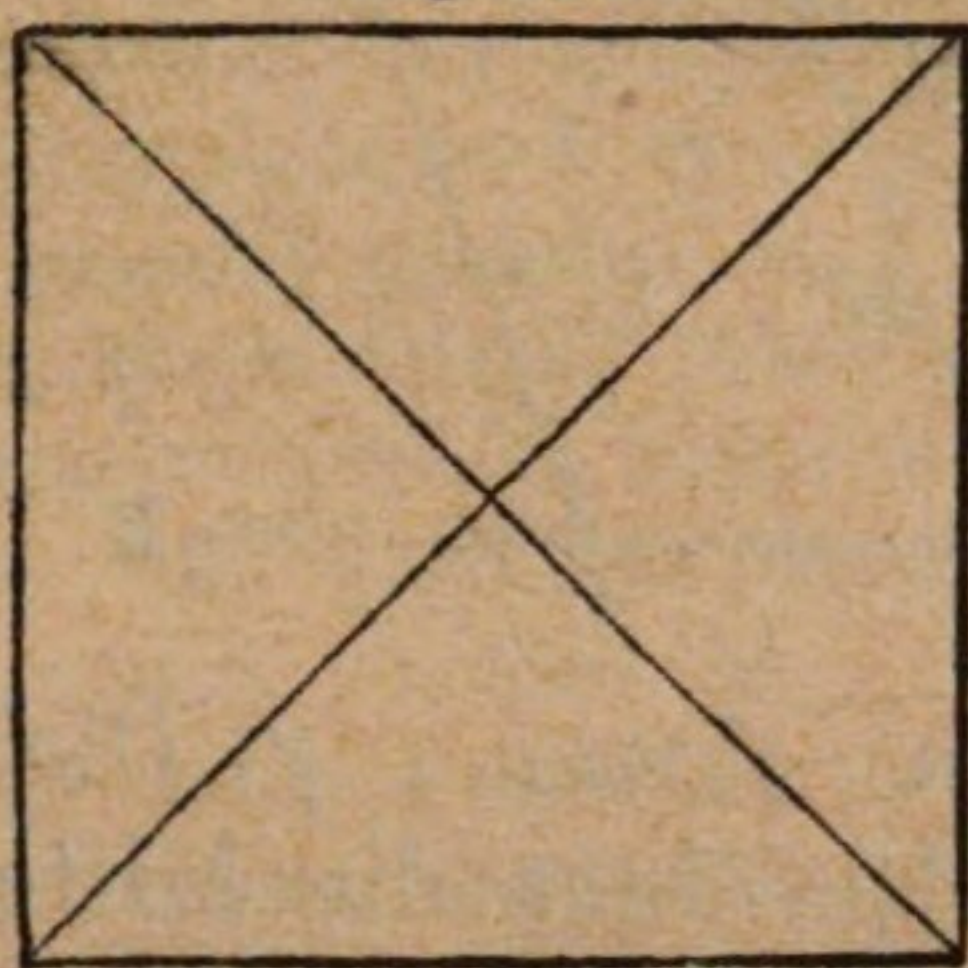
gleichweit von dem Schnittpunkte derselben entfernt. | nalen halbiren die gegenüberliegenden Winkel.

Beweis. b) Man beweise die Congruenz der Dreiecke  $dab$  und  $adc$  nach § 17 a<sub>1</sub> und schliesse daraus die Gleichheit von  $db$  und  $ac$ .

Der Beweis von  $\beta$  ergibt sich unmittelbar aus § 23 a und § 18 d.

c) Wenn in einem Rechteck zwei anliegende Seiten gleich sind, so sind alle Seiten desselben gleich und das Viereck heisst Quadrat. Die Diagonalen des Quadrats stehen senkrecht auf einander. (Fig. 35 a.)

Fig. 35 a.



$\gamma$ ) Wenn in einem Rhombus ein Winkel ein rechter ist, so stellt dasselbe ein Quadrat vor. Die Diagonalen sind alsdann einander gleich.

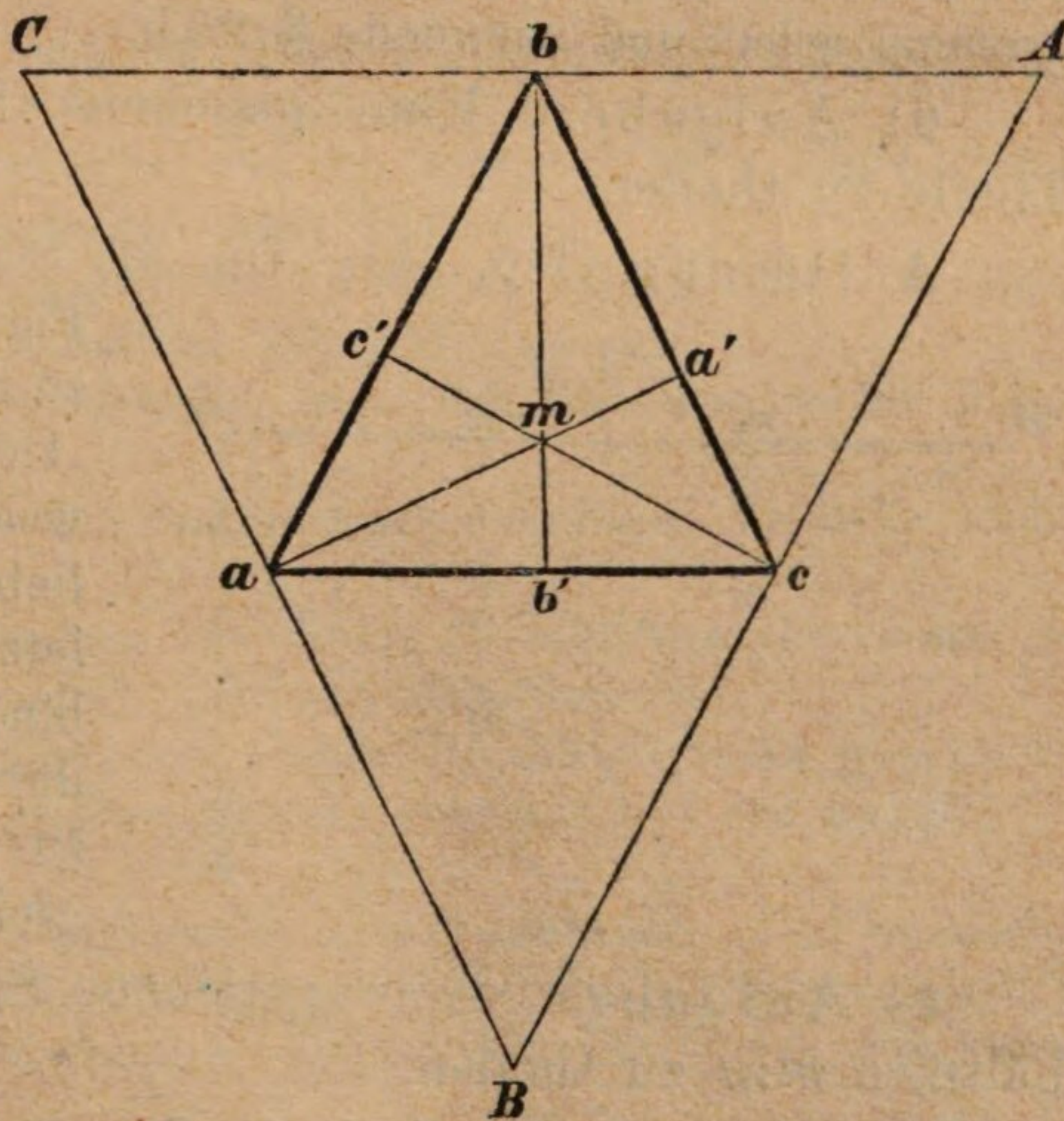
### Anwendungen.

§ 28.

a) In jedem Dreieck schneiden sich die 3 Höhen in einem Punkte.

Beweis (Fig 36). Man ziehe durch die Ecken des Dreiecks  $abc$  Parallelen zu den gegenüberliegenden Seiten. In dem dadurch entstandenen Dreieck  $ABC$  sind  $a, b, c$  die Mitten der Seiten (§ 25 b) und die Höhen  $aa', bb', cc'$  stehen bezüglich auf diesen Seiten senkrecht. Nach § 23 b müssen sich also  $aa', bb', cc'$  in einem Punkte schneiden.

Fig. 36.

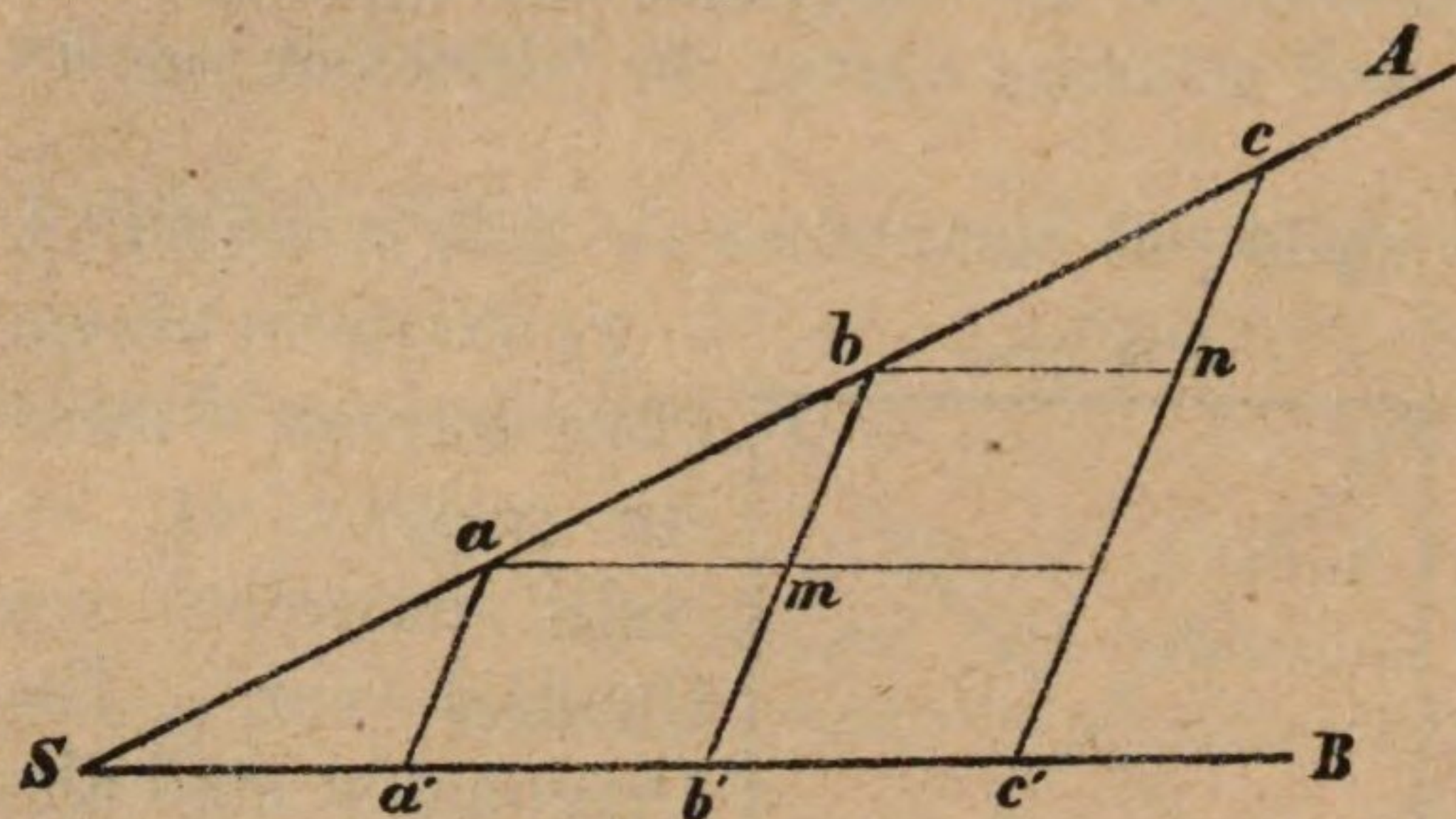


b) Wenn man auf einem Schenkel eines Winkels gleiche Stücke abträgt und durch die entstandenen Theilpunkte Parallelen zieht, so werden auch auf dem andern Schenkel gleiche Stücke abgeschnitten.



Beweis (Fig. 37). Wenn  $Sa = ab = bc$  und die Geraden  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  unter sich parallel sind, so ziehe man noch  $am$  und  $bn$  mit  $SB$  parallel.

Fig. 37.



Aus der Congruenz der Dreiecke  $Saa'$ ,  $abm$ ,  $bcn$  (§ 17  $\alpha$ ) folgt die Gleichheit der Strecken  $Sa'$ ,  $am$ ,  $bn$ . Hieraus schliesst man aber durch § 25 b, dass auch  $Sa' = a'b' = b'c'$ .

c) Zieht man in einem Dreieck durch die Mitte einer Seite eine Parallele mit einer andern, so wird die dritte Seite halbiert.

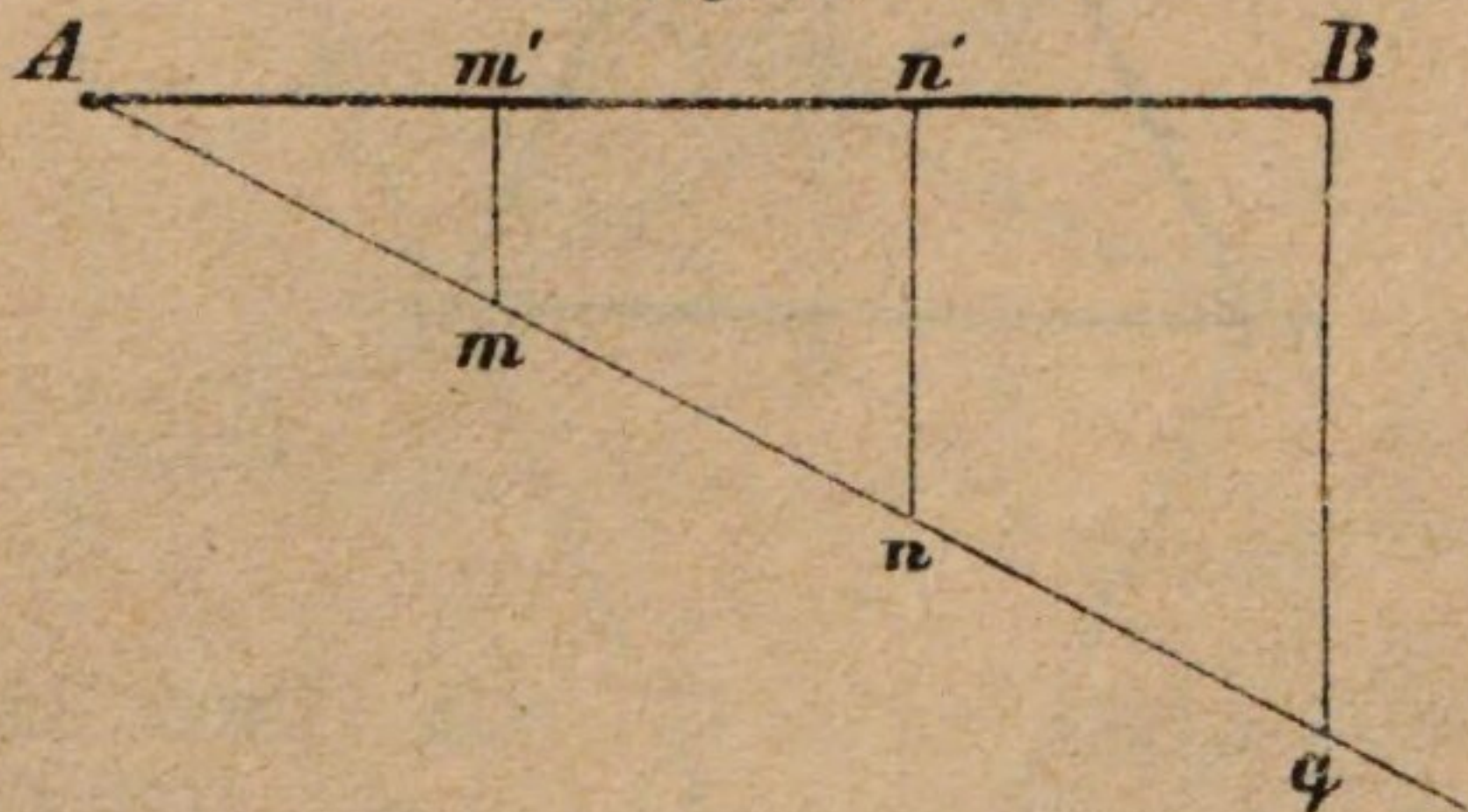
$\gamma$ ) Diejenige Strecke, welche die Mittelpunkte zweier Dreieckseiten verbindet, ist mit der dritten Seite parallel und halb so gross als diese.

Der Beweis von c) folgt direct aus b). Die erste Behauptung in  $\gamma$ ) wird indirect bewiesen. Zu dem Beweise der zweiten Behauptung nehme man an, dass in dem Dreieck  $ABC$  (Fig. 36)  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die Mitten der Seiten, also  $acbC$  und  $cabA$  Parallelogramme seien und verwende § 25 b.

d) Aufgabe. Eine gegebene Strecke in  $n$  gleiche Theile zu theilen.

Auflösung (Fig. 38): Um die Strecke  $AB$  in  $n$  (in der

Fig. 38.



Figurist  $n=3$ ) gleiche Theile zu theilen, ziehe man durch  $A$  eine beliebige Gerade, auf welcher man  $n$  mal eine beliebige Strecke aufträgt. Den letzten Theilpunkt  $q$  verbinde man mit  $B$  und ziehe durch die übrigen Parallelen zu  $qB$ , welche  $AB$  in  $n$  gleiche Theile theilen.

e) Aufgabe. Eine gegebene Strecke nach dem Verhältniss  $m:n$  zu theilen.

Auflösung. Man theile die Strecke in  $m + n$  gleiche Theile. Der  $m$ te Theilpunkt theilt die Strecke in der verlangten Weise.



Uebungen.

§ 29.

1) Wenn die Diagonalen eines Parallelogramms einander gleich sind, so ist dasselbe ein Rechteck.

2) Wenn die Diagonalen eines Parallelogramms senkrecht auf einander stehen, so ist dasselbe ein Rhombus.

3) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Mittellinie nach der Mitte der Hypotenuse halb so gross als die Hypotenuse (§ 27, b).

4) Wenn in einem Dreieck die Mittellinie nach der Mitte einer Seite die Hälfte dieser Seite ist, so ist der gegenüberliegende Winkel ein Rechter.

5) In einem gleichschenkligen Trapez sind die Winkel an einer der parallelen Seiten einander gleich.

6) Welches ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche von zwei parallelen Geraden gleiche Entfernung haben?

7) In einen Winkel eine gegebene Strecke so zu legen, dass sie mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

8) Durch einen gegebenen Punkt  $d$ , der innerhalb eines Winkels liegt, eine Gerade so zu ziehen, dass  $d$  ihr Mittelpunkt wird.

9) Zwischen zwei Parallelen durch einen gegebenen Punkt eine gegebene Strecke zu legen.

Die im Folgenden genannten Figuren zu construiren, wenn gegeben ist:

10)  $\alpha$ ) Die Seite eines Quadrats.  $\beta$ ) Die Diagonale eines Quadrats.

11)  $\alpha$ ) Eine Seite und ein Winkel eines Rhombus.  $\beta$ ) Die beiden Diagonalen eines Rhombus.

12)  $\alpha$ ) Zwei Seiten eines Rechtecks.  $\beta$ ) Die Diagonale und eine Seite desselben.

13)  $\alpha$ ) Zwei Seiten und ein Winkel eines Parallelogramms.  $\beta$ ) Zwei Diagonalen und eine Seite desselben.

14)  $\alpha$ ) Die zwei Grundlinien und der Schenkel eines gleichschenkligen Trapezes.  $\beta$ ) Die 4 Seiten eines Trapezes.

15) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Grundlinie, die Höhe und ein Winkel an der Grundlinie gegeben ist.

16) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Mittelpunkte der 3 Seiten gegeben sind.

17) Die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks bilden ein Parallelogramm.

18) Welche Eigenschaften hat dieses Parallelogramm, wenn das gegebene Viereck ein Rechteck oder ein Rhombus ist?

19) In jedem Parallelogramm liegen die Mittelpunkte gegenüberliegender Seiten auf einem Durchmesser, welcher mit den andern Seiten parallel geht.

20) Diejenige Strecke, welche die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten eines Trapezes verbindet, ist mit den übrigen Seiten parallel und halb so gross als ihre Summe. (Ziehe eine Diagonale und wende § 28 c und  $\gamma$  an.)

21) Diejenige Strecke, welche die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes verbindet, ist halb so gross als die Differenz der parallelen Seiten.



## III. Abschnitt.

## Der Kreis und die regelmässigen Vielecke.

## § 30. Punkte und Tangenten des Kreises.

Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem gegebenen Punkte (Mittelpunkt, Centrum) eine gegebene Entfernung (Radius) haben.

a) Folgerung. Ein Punkt, dessen Entfernung von dem Mittelpunkte dem Radius gleich ist, ist ein Punkt des Kreises.

b) Durch einen Kreispunkt geht nur eine Tangente. Dieselbe steht senkrecht auf dem Radius ihres Berührungspunktes ( $\beta$ ).

$\alpha$ ) Erklärung. Eine Gerade, deren Entfernung von dem Mittelpunkte dem Radius gleich ist, heisst eine Tangente des Kreises.

$\beta$ ) Auf einer Tangente liegt ein einziger Kreispunkt, welcher Berührungspunkt heisst. Derselbe ist der Fusspunkt der aus dem Mittelpunkte gefällten Senkrechten.

## Beweise.

Wenn  $q$  (Fig. 39) ein Kreispunkt ist, so ist die auf  $aq$  errichtete Senkrechte  $db$  Tangente, weil ihre Entfernung vom Mittelpunkte dem Radius gleich ist ( $\alpha$ ).

Keine andere durch  $q$  gezogene Gerade  $qp$  kann Tangente sein, denn ihre Entfernung vom Mittelpunkte ist kleiner als der Radius, weil in dem rechtwinkligen Dreieck  $agq$  nach § 20  $\alpha$   $ag < aq$ .

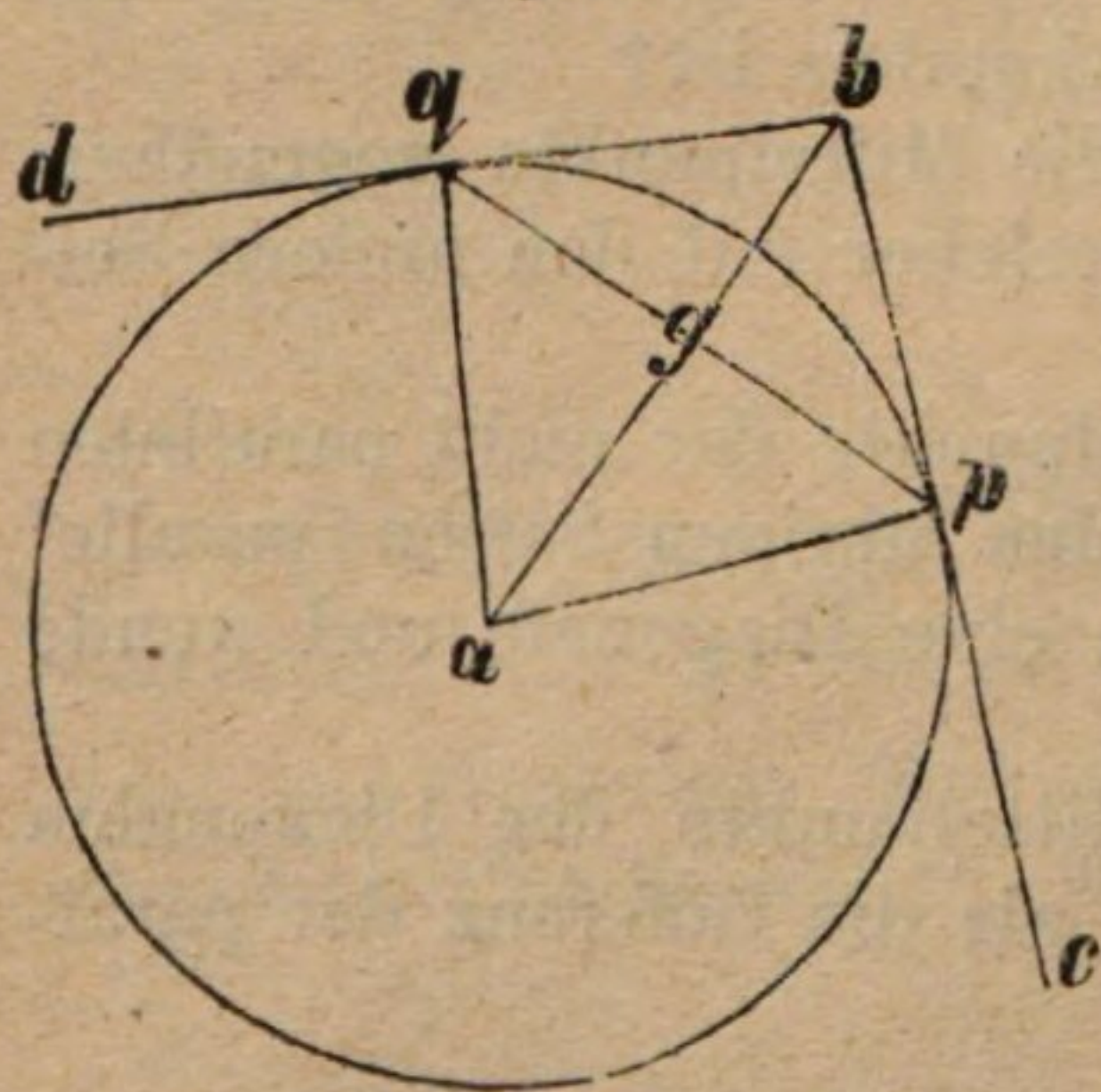
Wenn  $bc$  (Fig. 39) eine Tangente ist, so ist die aus dem Mittelpunkte gefällte Senkrechte  $ap$  dem Radius gleich ( $\alpha$ ) und  $p$  ist ein Kreispunkt ( $\alpha$ ).

Kein anderer Punkt  $b$  der Tangente kann auf dem Kreise liegen, denn seine Entfernung vom Mittelpunkte ist grösser als der Radius, weil in dem rechtwinkligen Dreieck  $pab$  nach § 20  $\alpha$ ,  $ab > ap$ .

c) Die Senkrechte, auf der Tangente in ihrem Berührungspunkte errichtet, geht durch den Mittelpunkt.

Beweis (Fig. 39). Wenn eine in dem Berührungspunkte  $p$  der Tangente  $bc$  errichtete Senkrechte  $S$  nicht durch den Mittelpunkt  $a$  ginge, so könnte man aus  $a$  eine Senkrechte fällen, welche nach  $\beta$ ) durch  $p$  ginge. Dann ständen in  $p$  zwei Gerade,  $pa$  und  $S$ , auf  $cb$  senkrecht, was unmöglich ist (§ 7  $\gamma$ ).

Fig. 39.





## Sehnen und Tangentenwinkel.

## § 31.

a) Eine Sehne bildet mit den Radien ihrer Endpunkte ein gleichschenkliges Dreieck.

b) Eine Sehne wird durch die aus dem Mittelpunkte gefällte Senkrechte halbiert.

$\alpha$ ) Eine Sehne bildet mit den Tangenten ihrer Endpunkte ein gleichschenkliges Dreieck.

$\beta$ ) Ein Tangentenwinkel wird durch die Verbindungslinie seines Scheitels mit dem Mittelpunkte halbiert.

Beweise (Fig. 39).

Das Dreieck  $qap$  ist wegen der Gleichheit der Radien  $aq$  und  $ap$  gleichschenklig. Die zweite Behauptung folgt aus einem Satze über das gleichschenklige Dreieck (§ 18 e).

c) Die Mittelsenkrechte einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Man beweise die Congruenz der bei  $p$  und  $q$  rechtwinkligen Dreiecke  $apb$  und  $aqb$  nach § 21 b. Daraus folgt  $bp = bq$  und  $\sphericalangle pba = \sphericalangle qba$ , so dass beide Behauptungen bewiesen sind.

$\gamma$ ) Die Halbirungslinie eines Tangentenwinkels geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Beweise.

Die Behauptung folgt aus § 23 a, wenn man bedenkt, dass der Mittelpunkt des Kreises von den Endpunkten einer Sehne gleichweit entfernt ist.

Die Behauptung folgt aus § 23  $\alpha$ , wenn man bedenkt, dass der Mittelpunkt des Kreises von den beiden Tangenten gleichweit entfernt ist.

## Fortsetzung.

## § 32.

a) Zwei Sehnen, welche gleiche Entfernung vom Mittelpunkte haben, sind gleich.

$\alpha$ ) Zwei Tangentenwinkel, deren Scheitel gleiche Entfernung vom Mittelpunkte haben, sind gleich.

Beweise.

Die Hälften der Sehnen sind Katheten in zwei congruenten rechtwinkligen Dreiecken (§ 31 b), in welchen die gegenüberliegenden Ecken im Mittelpunkte liegen. Aus der Gleichheit der Hälften folgt auch die Gleichheit der Ganzen.

Die Hälften der Tangentenwinkel sind Winkel in zwei congruenten rechtwinkligen Dreiecken, deren gegenüberliegende Katheten Radien sind (§ 31  $\beta$ ). Aus der Gleichheit der Hälften folgt auch die Gleichheit der Ganzen.



b) Von zwei Sehnen ist diejenige die kleinere, welche vom Mittelpunkte weiter entfernt ist.

$\beta$ ) Von zwei Tangentenwinkeln ist derjenige der kleinere, dessen Scheitel vom Mittelpunkte weiter entfernt ist.

#### Beweise.

Wegen a) kann man annehmen, dass die beiden Sehnen einen Endpunkt gemeinsam haben und auf verschiedenen Seiten des diesem Punkte zugehörigen Radius liegen. Diejenige Strecke, welche die Mittelpunkte der Sehnen verbindet, bildet mit dem Mittelpunkte des Kreises ein Dreieck, in welchem nach der Voraussetzung und § 20 a die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  an der Grundlinie verschieden sind. Dieselbe Strecke bildet mit dem gemeinsamen Punkte der Sehnen ein Dreieck, in welchem die Winkel an der Grundlinie Complementwinkel von  $\alpha$  und  $\beta$  sind. Durch Anwendung von § 20  $\alpha$  beweist man die Behauptung für die Hälften der Sehnen und dadurch auch für die Ganzen.

Wegen  $\alpha$ ) kann man annehmen, dass die beiden Scheitelpunkte auf derselben Tangente und auf verschiedenen Seiten ihres Berührungspunktes liegen. Diejenige Strecke, welche die beiden Scheitel verbindet, bildet mit dem Mittelpunkte des Kreises ein Dreieck, in welchem die beiden übrigen Seiten nach der Voraussetzung und deshalb auch die Winkel an der Grundlinie nach § 20 a verschieden sind. Die Behauptung ergibt sich hiermit für die Hälften der Tangentenwinkel und dadurch auch für die Ganzen.

Anmerkung. Die kleinste Sehne, welche durch einen Punkt gezogen werden kann, ist diejenige, welche in diesem Punkte halbiert wird. Sie steht senkrecht auf dem Durchmesser, welcher durch diesen Punkt gezogen ist.

c) Eine Tangente kann als eine Secante des Kreises betrachtet werden, deren Schnittpunkte zusammenfallen.

$\gamma$ ) Ein Punkt des Kreises kann als der Scheitel eines Tangentenwinkels von  $180^\circ$  angesehen werden.

#### Beweise.

Wenn eine Secante sich vom Mittelpunkte entfernt, so wird die auf ihr liegende Sehne kleiner (b). Wenn die Entfernung

Wenn der Scheitel eines Tangentenwinkels sich dem Mittelpunkte nähert, so wird der Tangentenwinkel grösser. Wenn der



dem Radius gleich geworden ist, so ist die Secante in eine Tangente übergegangen (§ 30,  $\alpha$ ) und die beiden Endpunkte der Sehne sind in dem Berührungspunkte zusammengefallen.

Scheitel auf dem Kreise angekommen ist, so sind die beiden Schenkel des Winkels in eine einzige Gerade gefallen (§ 30 b) und derselbe ist daher einem gestreckten Winkel gleich.

### Geometrische Oerter. — Aufgaben.

§ 33.

a) Es gibt unendlich viele Kreise, welche durch zwei gegebene Punkte gehen. Der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte ist diejenige Gerade, welche den Abstand der beiden Punkte senkrecht halbirt.

Der Beweis ergibt sich leicht aus § 23 a und § 30 a.

$\alpha$ ) Es gibt unendlich viele Kreise, welche zwei convergente Gerade berühren. Der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte besteht aus denjenigen Linien, welche die Winkel der beiden Geraden halbiren.

Der Beweis ergibt sich leicht aus § 23  $\alpha$  und § 30  $\alpha$ .

b) Es gibt nur einen Kreis, welcher durch drei Punkte geht, die nicht in einer Geraden liegen. Sein Mittelpunkt ist derjenige Punkt, welcher von den gegebenen Punkten gleichweit entfernt ist.

Beweis. Die zweite Behauptung des Satzes folgt direct aus der Definition des Kreises. — Wenn mehrere Kreise der genannten Art vorhanden wären, so müssten ihre Mittelpunkte nach § 23 b zusammenfallen und die Kreise müssten sich wegen der Gleichheit ihrer Radien decken.

c) Es gibt unendlich viele Kreise, welche eine Gerade in demselben Punkte berühren. Der geometrische Ort ihrer Mittelpunkte ist eine in dem Berührungspunkte errichtete Senkrechte.

$\gamma$ ) Zwei Kreise, welche eine Gerade in demselben Punkte berühren, können ausser ihrem Berührungspunkte keinen Punkt gemeinsam haben ohne zusammenzufallen. (Berührung zweier Kreise.)

Beweis a). Der Beweis von c) wird leicht mit Hülfe von § 30 c geführt.

$\gamma$ ) Wenn es mehrere Kreise gäbe, welche durch die Punkte  $p$  und  $q$  (Fig. 39) gehen, und die Gerade  $bc$  in  $p$  berühren, so müssten ihre Mittelpunkte in demjenigen Punkte  $a$  zusammenfallen, welcher sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $pq$  und der in  $p$  auf  $bc$  errichteten Senkrechten ergibt. Diese Kreise müssten sich also decken, was der Voraussetzung widerspricht.



## Aufgaben.

d) Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch drei gegebene Punkte geht (1 Auflösung).

e) Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und in dem einen derselben eine gegebene Gerade berührt (1 Auflösung).

δ) Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Gerade berührt (4 Auflösungen).

ε) Einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei gegebene Gerade berührt und zwar die eine derselben in einem gegebenen Punkte (2 Auflösungen).

§ 34. Kreise, welche sich schneiden oder berühren.

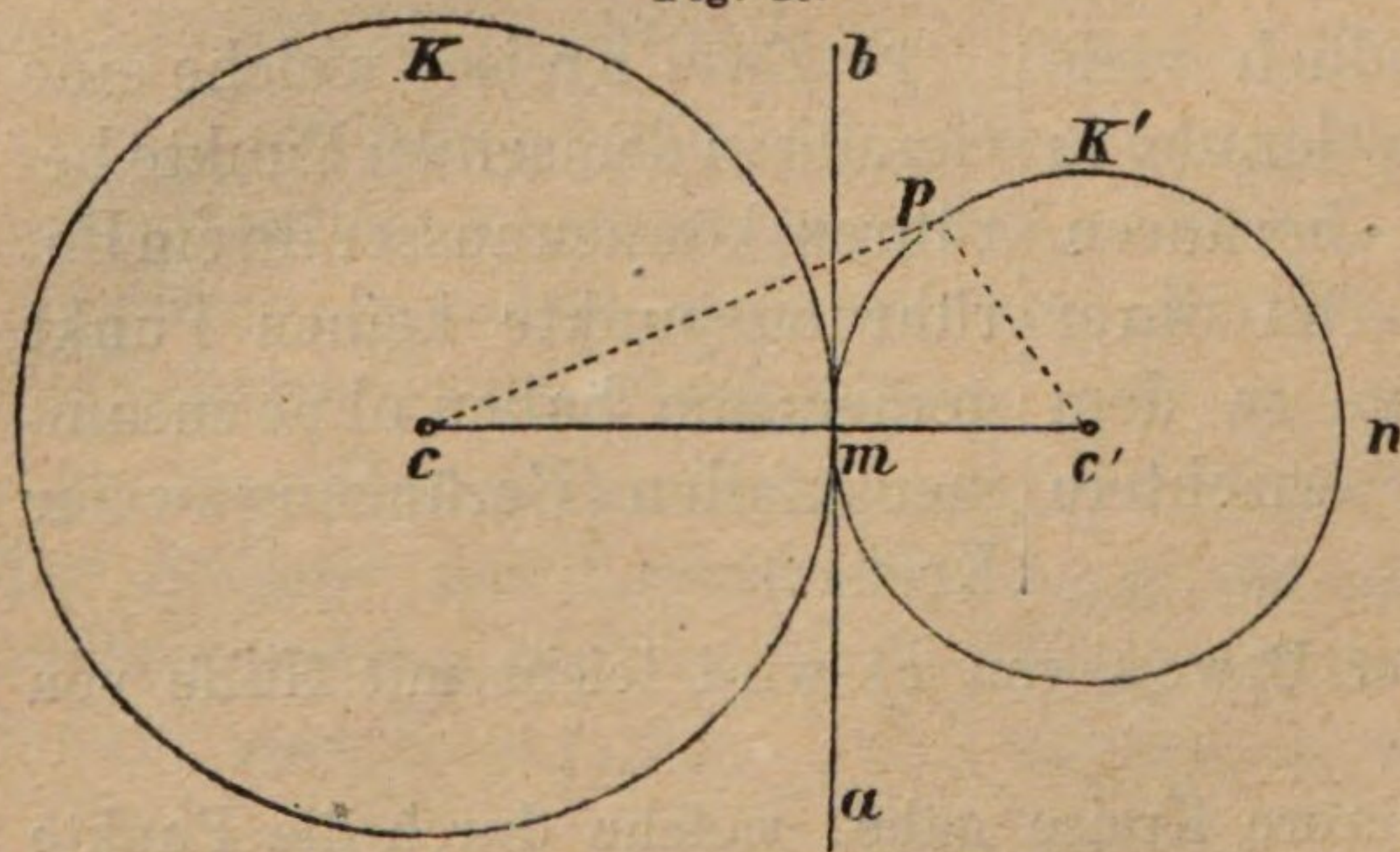
Zwei Kreise, deren Mittelpunkte zusammenfallen, heissen concentrisch. Im andern Falle bestimmen die Mittelpunkte eine Gerade, welche Centrale der beiden Kreise genannt wird.

a) Wenn zwei Kreise einen Punkt ihrer Centralen gemeinsam haben, so berühren sie sich. Die gemeinsame Tangente (des Berührungspunktes) zweier Berührungskreise steht auf der Centralen senkrecht.

α) Wenn zwei Kreise einen Punkt ausserhalb ihrer Centralen gemeinsam haben, so treffen sie sich in einem zweiten Punkte. Die gemeinsame Sehne zweier Schnittkreise wird von der Centralen senkrecht halbirt.

Beweis a). Eine in dem gemeinsamen Punkte  $m$  der Kreise  $K$  und  $K'$  (Fig. 40) auf der Centralen  $cc'$  errichtete Senkrechte

Fig. 40.



$ab$  ist nach § 30 α Tangente der beiden Kreise. Dieselben berühren sich also nach § 33 γ.

α) Wenn (Fig. 41) die Kreise  $K$  und  $K'$  einen Punkt  $a$  ausserhalb  $cc'$  gemeinsam haben, so construirt man den

Gegenpunkt  $b$  von  $a$  in Bezug auf  $cc'$ . Dann liegt  $b$  auf dem Kreise  $K$ , weil  $ca = cb$  (§ 23 a), und auf dem Kreise  $K'$ , weil  $c'a = c'b$  (§ 23 a). Hiermit erweisen sich die beiden Behauptungen des Lehrsatzes.



b) Zwei Kreise berühren sich von aussen oder von innen, je nachdem der Berührungspunkt zwischen den Mittelpunkten liegt oder nicht.

Beweis. Zwei Berührungskreise haben ausser ihrem Berührungspunkte keinen weiteren Punkt gemein (§ 33  $\gamma$ ). Die Flächen dieser Kreise schliessen sich also vollkommen aus oder der grössere schliesst den kleinern ein. Der erste Fall tritt ein, wenn der Berührungspunkt ( $m$  Fig. 40) zwischen den Mittelpunkten ( $c, c'$ ) gelegen ist, weil alsdann der Mittelpunkt eines jeden Kreises ausserhalb des anderen liegt. Der zweite Fall tritt ein, wenn der Berührungspunkt ( $n$  Fig. 42) auf der Verlängerung des Centralabstandes ( $cc'$ ) gelegen ist, weil alsdann der Mittelpunkt des kleinern Kreises von dem grössern Kreise eingeschlossen wird.

Fig. 41.

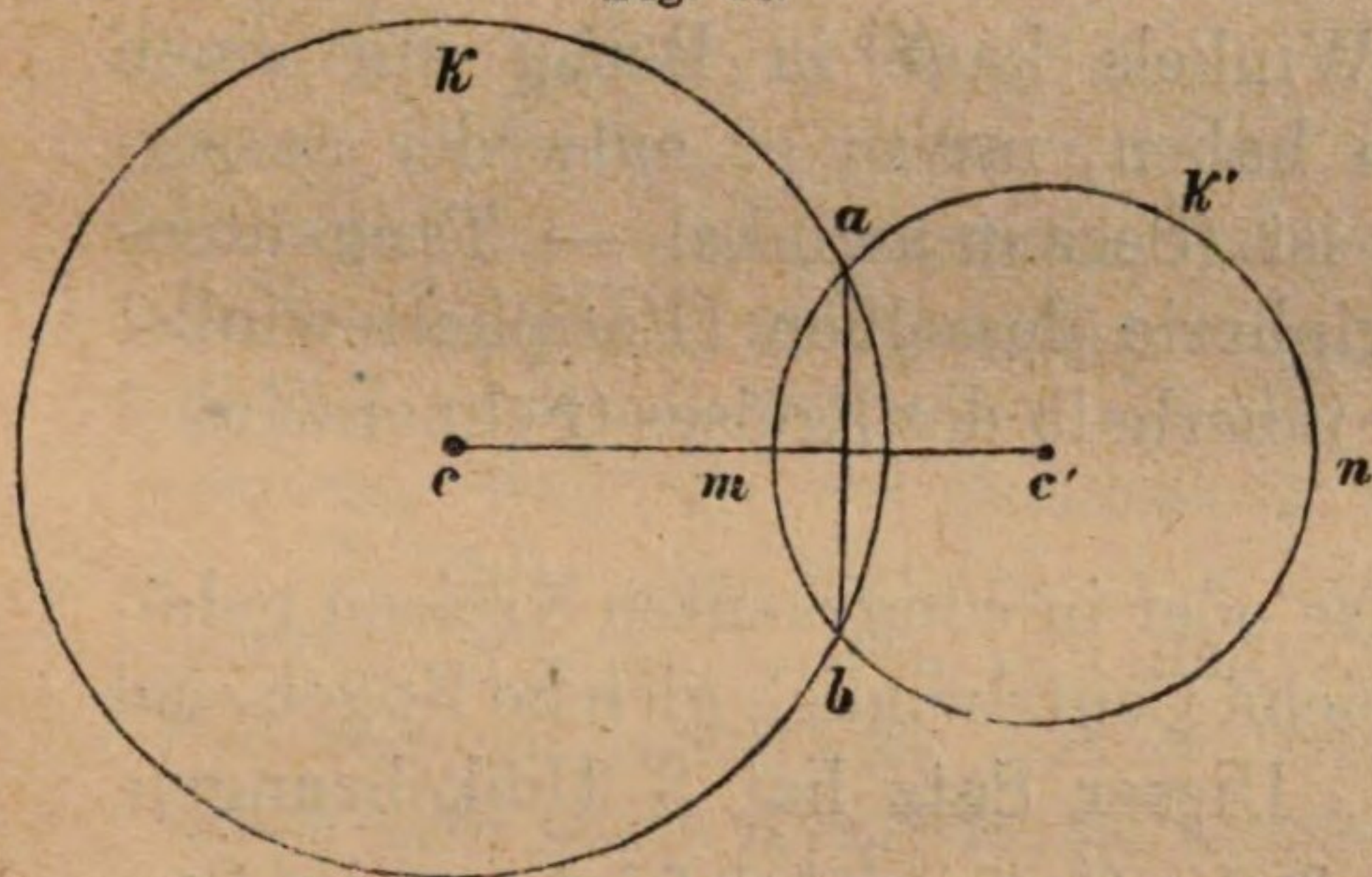
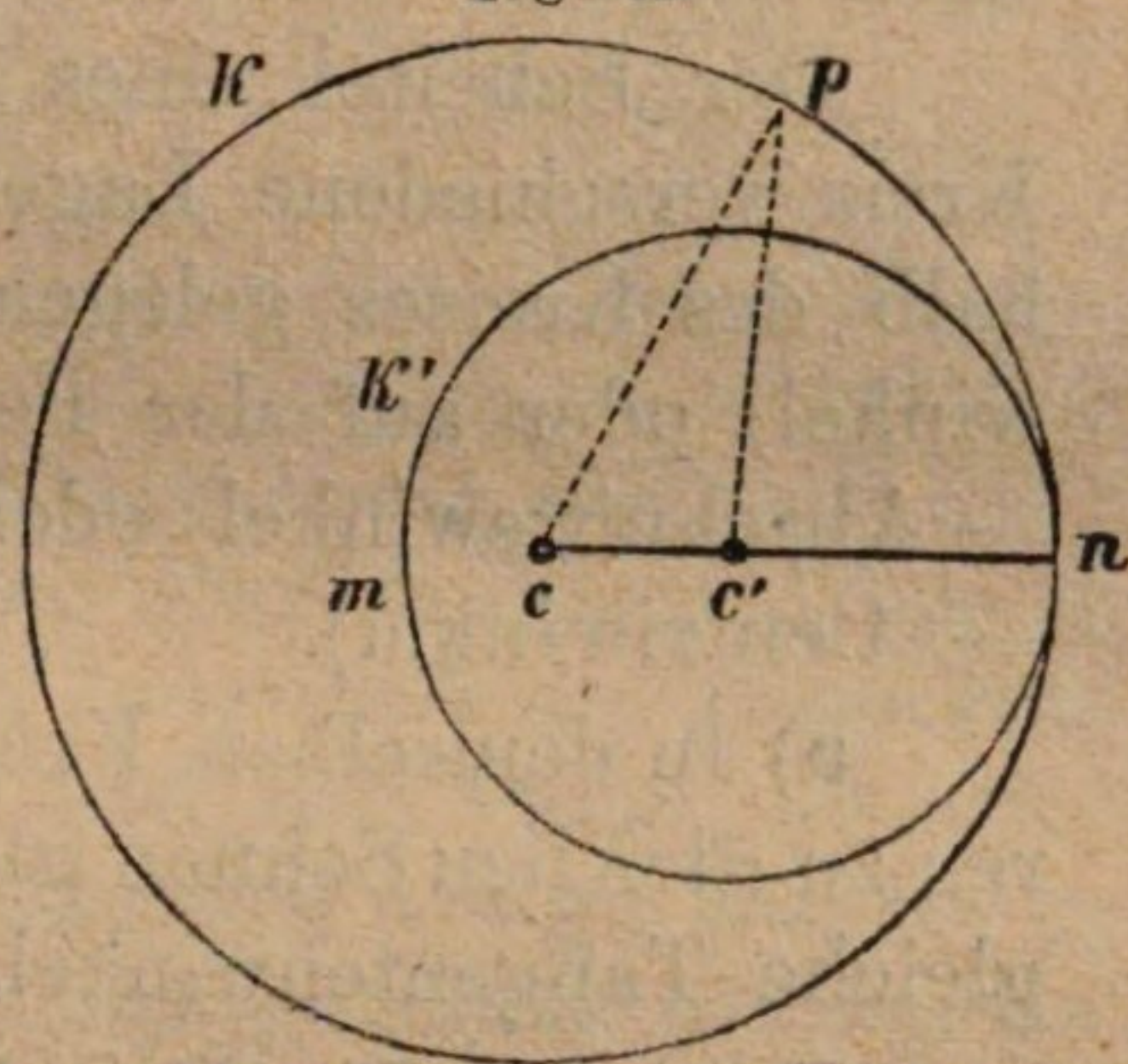


Fig. 42.



Anmerkung. Die Figuren 41 und 42 können aus Fig. 40 abgeleitet werden, wenn man in der letzteren den Kreis  $K'$  so bewegt denkt, dass sein Mittelpunkt  $c'$  sich dem Mittelpunkt  $c$  auf der Centralen nähert. Die Figur 42 entsteht, sobald der Punkt  $n$  in Fig. 40 in die Lage gekommen ist, welche anfänglich  $m$  einnahm. Dabei ergeben sich Beziehungen zwischen der Grösse des Centralabstandes  $cc'$ , der Summe und der Differenz der Radien, welche leicht auszusprechen sind. Wenn man die Sätze § 20  $c$  und  $\gamma$  auf das Dreieck  $cpc'$  anwendet, welches durch die Mittelpunkte und einen beliebigen Punkt des einen Kreises gebildet wird, so kommt man zu einem weitem Beweise des Satzes b).

#### Fortsetzung. — Aufgaben.

§ 35.

a) Wenn zwei Kreise sich berühren, so liegt ihr Berührungspunkt auf der Centralen beider Kreise (Umkehrung von § 34 a).

$\alpha$ ) Die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit einem Punkte des Kreises ist die Centrale aller Kreise, welche den ersteren in jenem Punkte berühren.



Beweis. a) Wenn der Berührungspunkt ausserhalb der Centralen läge, so hätten die Kreise noch einen weitem Punkt gemein (§ 34  $\alpha$ ) und würden nach § 33  $\gamma$  zusammenfallen.

$\alpha$ ) ist eine unmittelbare Folgerung aus a).

#### Aufgaben.

b) Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis in  $p$  berührt und ausserdem noch durch einen gegebenen Punkt geht (§ 35  $\alpha$ . § 33 a).

$\beta$ ) Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis in  $p$  und ausserdem noch eine gegebene Gerade berührt. (Ziehe die Tangente in  $p$  und wende § 33  $\epsilon$  an.)

#### § 36. Beziehungen zwischen Winkeln, deren Schenkel einen Kreis treffen.

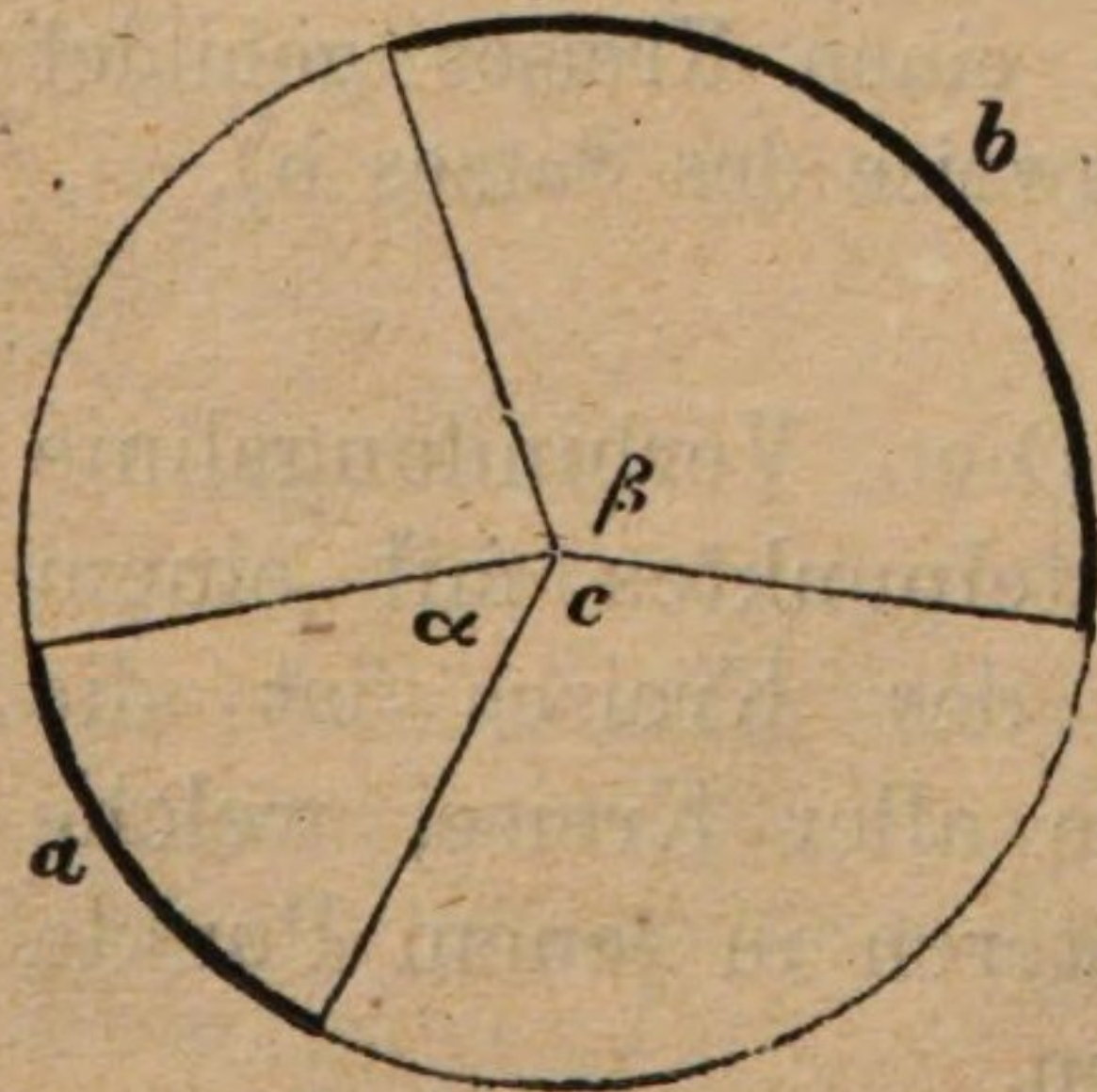
Der Scheitel eines Winkels kann in Bezug auf einen Kreis verschiedene Lagen haben, indem er entweder ausserhalb des Kreises gelegen ist (Secantenwinkel — Tangentenwinkel) oder auf der Peripherie desselben (Peripheriewinkel — Abschnittswinkel) oder innerhalb des Kreises (Sehnenwinkel — Centriwinkel).

a) In demselben Kreise oder in congruenten Kreisen gehören zu gleichen Sehnen gleiche Centriwinkel, gleiche Bogen und gleiche Tangentenwinkel. Dieser Satz hat 3 Umkehrungen.

Beweis. Die Gleichheit der Centriwinkel folgt aus der Congruenz zweier gleichschenkliger Dreiecke, welche die als gleich angenommenen Sehnen zu Grundlinien haben (§ 21 a). Hieraus ergibt sich die Gleichheit der Bogen nach § 5 d. Die Gleichheit der Tangentenwinkel folgt aus § 7  $\beta$ , indem jeder Tangentenwinkel das Supplement des zugehörigen Centriwinkels ist.

b) In demselben Kreise oder in congruenten Kreisen verhalten sich zwei Centriwinkel wie die zugehörigen Bogen.

Eig. 43.



Beweis.  $\alpha$  und  $\beta$  seien die Masszahlen zweier Centriwinkel (Fig. 43) in Gradmass und  $a, b$  die Masszahlen der zugehörigen Bogen in gewöhnlichem Längenmasse (Meter). Die Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  geben zugleich an, wieviel Bogengrade die Bogen  $a$  und  $b$  enthalten (§ 6 b). Bezeichnet man nun die Länge eines Bogengrades mit  $\epsilon$ , so hat man die Gleichungen  $a = \alpha \cdot \epsilon$ ;  $b = \beta \cdot \epsilon$  und daraus  $a : b = \alpha : \beta$ .



c) Ein Peripheriewinkel ist halb so gross als der Centriwinkel, welcher mit ihm auf demselben Bogen steht.

Beweis. 1. Fall: Der Mittelpunkt liegt auf einem Schenkel des Peripheriewinkels (Fig. 44). Der Winkel  $x$  ist als Aussenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks  $cdb$  doppelt so gross als der Winkel  $y$  oder  $y = \frac{x}{2}$ .

Fig. 44.

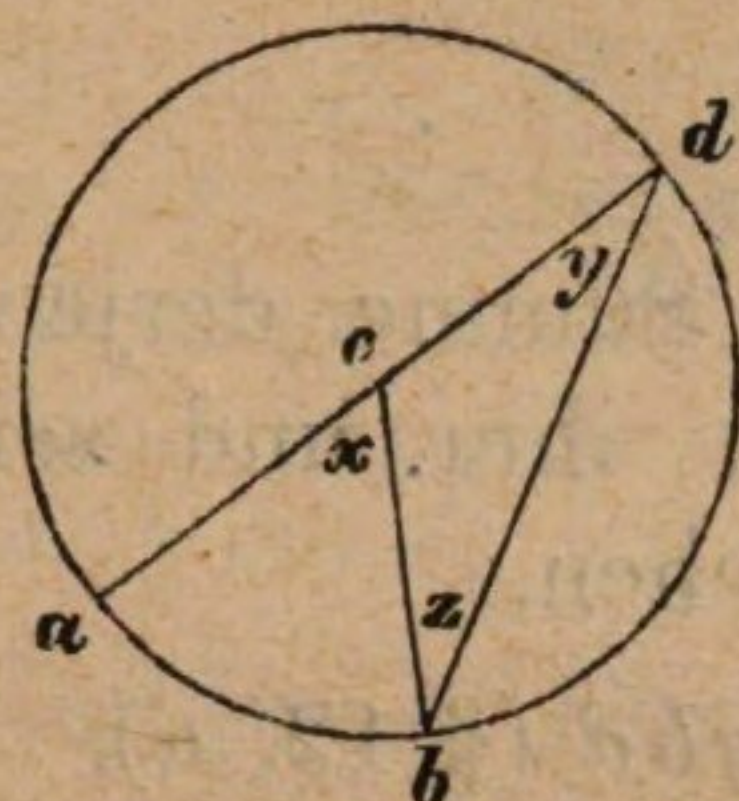


Fig. 45.

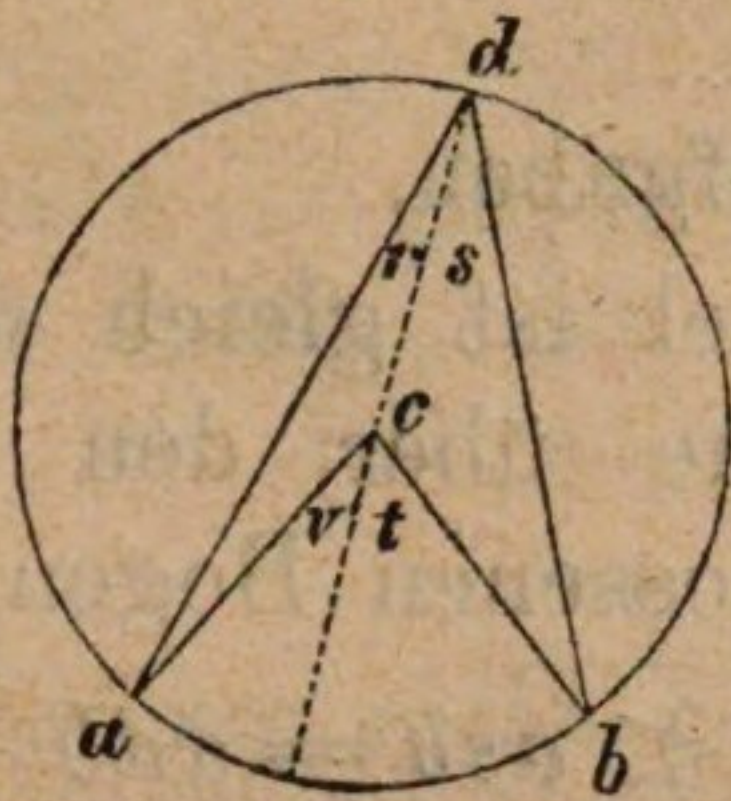
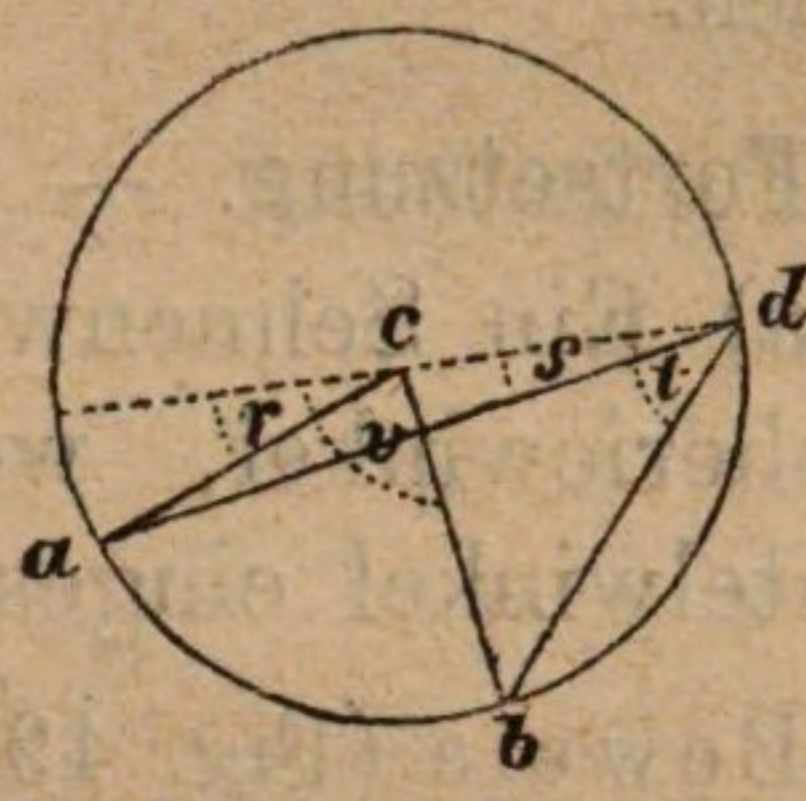


Fig. 46.



2. Fall: Der Mittelpunkt ist zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels gelegen (Fig. 45). Ziehe  $cd$ , so kann man den 1. Fall zweimal anwenden und die Gleichungen  $r = \frac{1}{2}v$ ,  $s = \frac{1}{2}t$  addiren, wodurch die Behauptung sich erweist.

3. Fall: Der Mittelpunkt  $c$  liegt ausserhalb des Peripheriewinkels (Fig. 46). Man ziehe  $cd$ , so lässt sich wieder der erste Fall zweimal anwenden. Aus den Gleichungen  $t = \frac{1}{2}v$  und  $s = \frac{1}{2}r$  erhält man durch Abziehen der zweiten von der ersten den Beweis.

d) Zusätze. Alle Peripheriewinkel, welche auf demselben Bogen stehen, sind gleich gross.

Alle Peripheriewinkel über dem Halbkreis sind Rechte. (Siehe Fig. 47.)

Fig. 47.

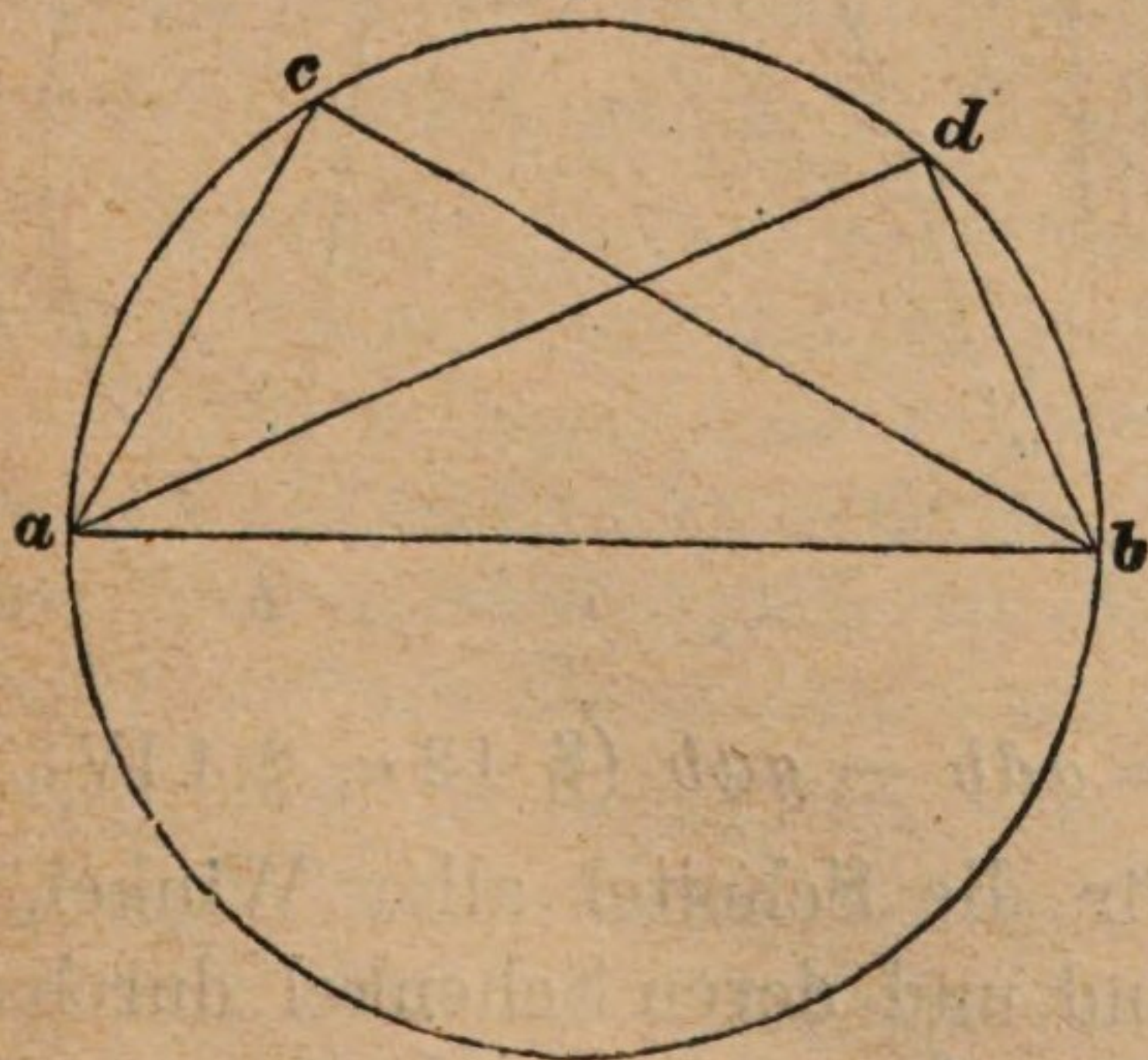
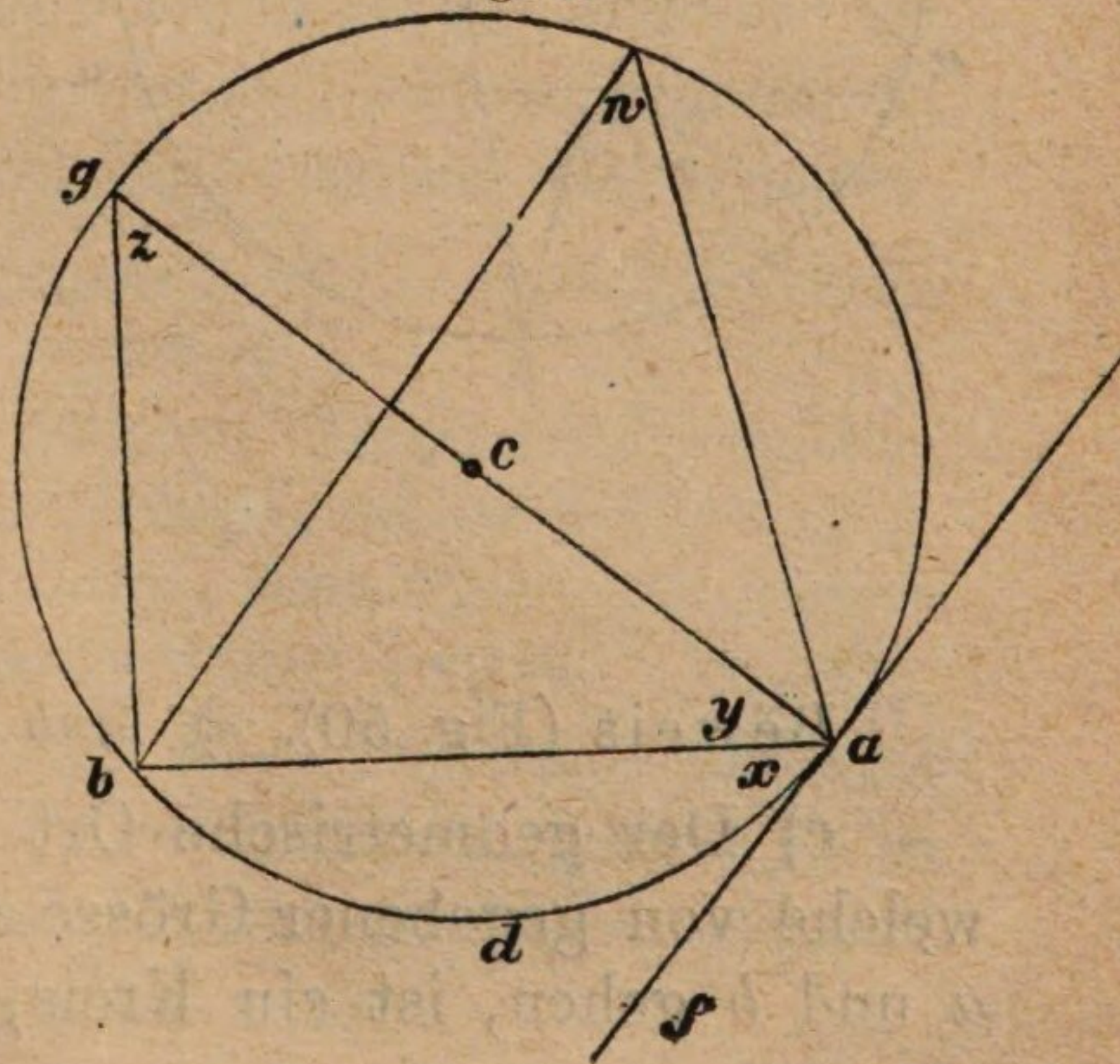


Fig. 48.





e) Der von einer Sehne und der Tangente eines Endpunktes gebildete Winkel ist gleich dem Peripheriewinkel in dem entgegengesetzten Kreisabschnitt.

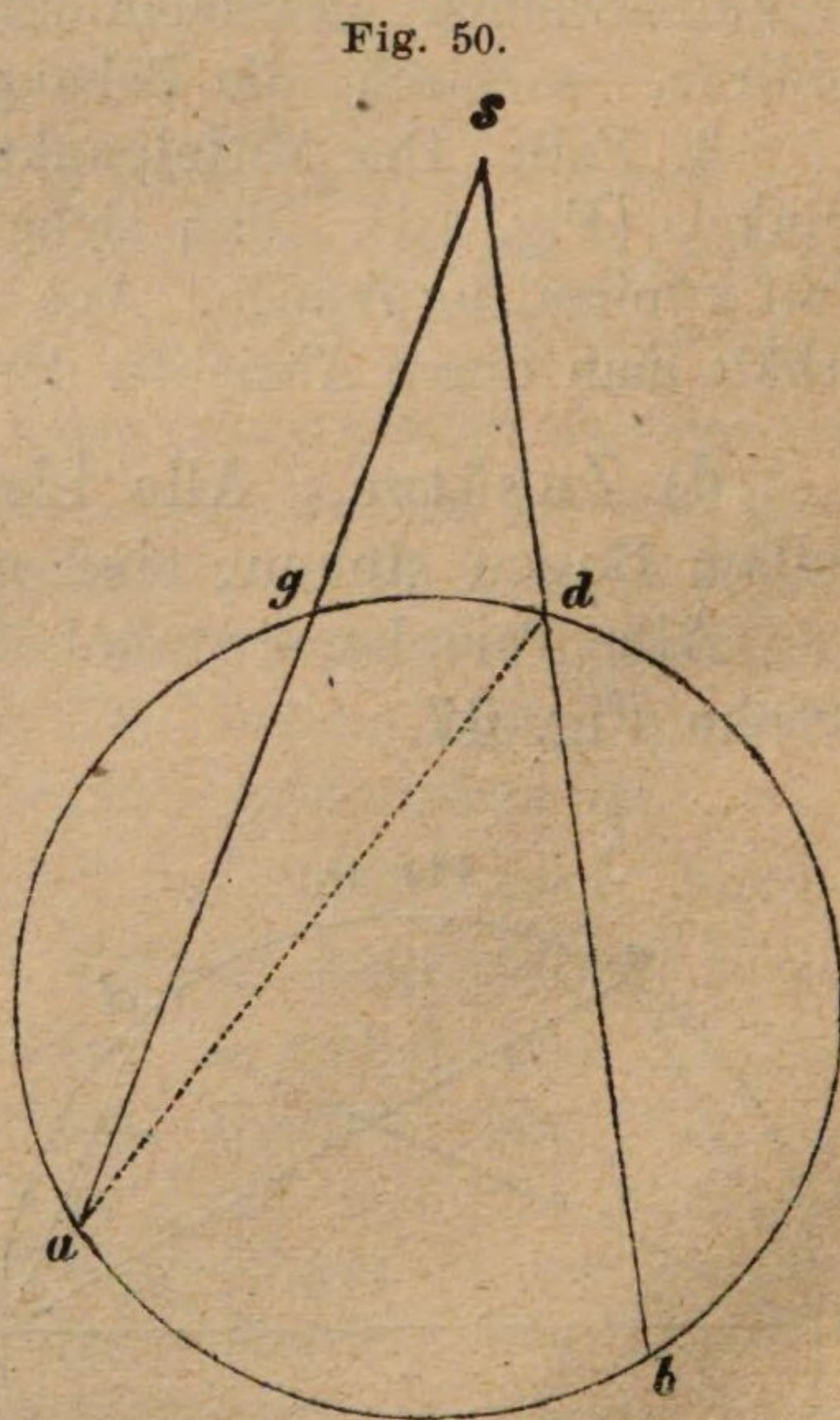
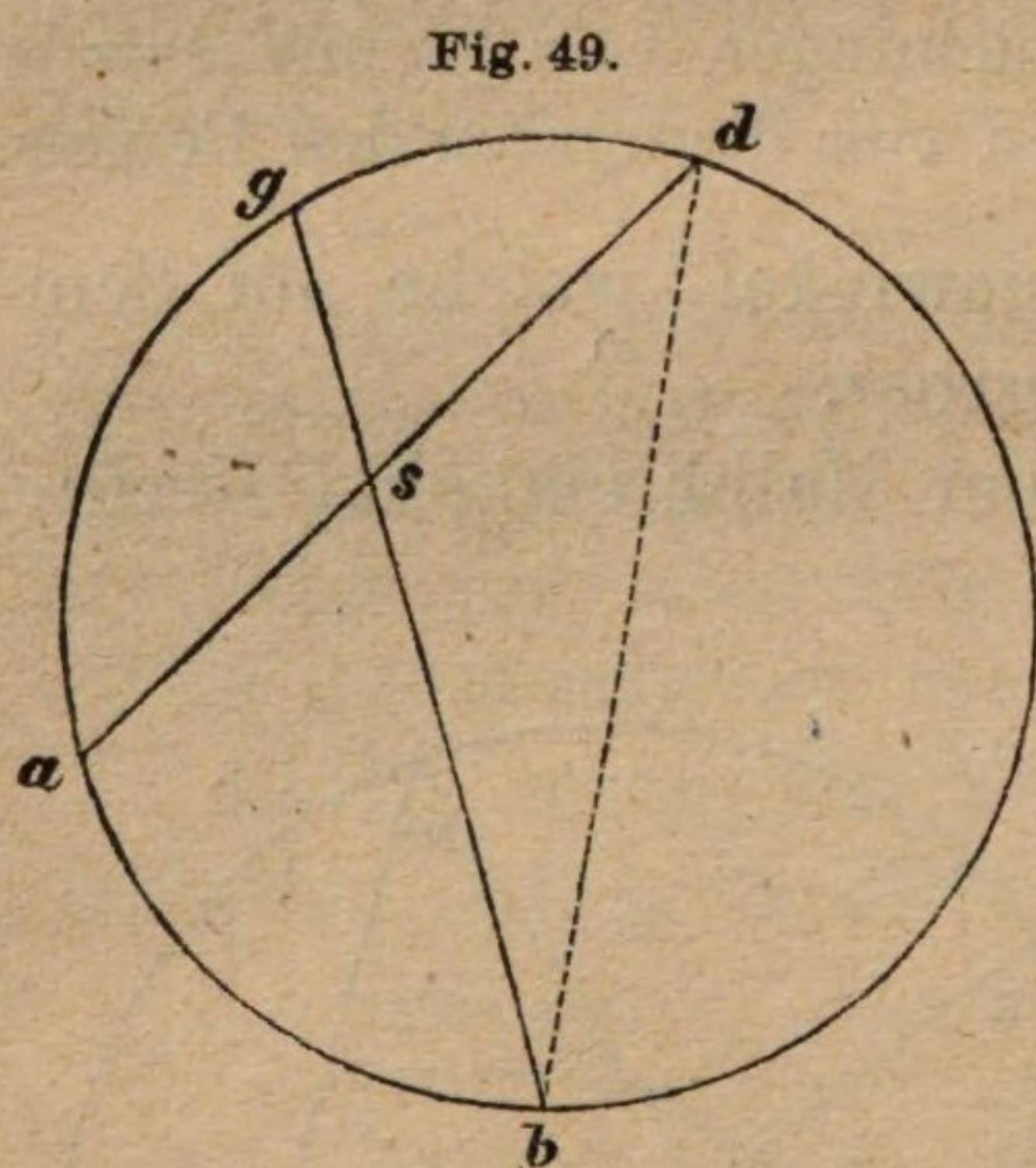
Beweis (Fig. 48). Man ziehe durch den Endpunkt  $a$  der Sehne den Durchmesser  $ag$  und verbinde  $g$  mit  $b$ . Dann sind die Winkel  $x$  und  $z$  einander gleich, weil sie beide mit dem Winkel  $y$  zusammen einen Rechten ausmachen (§ 30 b, § 36 d). Folglich ist auch jeder andere Peripheriewinkel  $w$  über  $ab$  dem Winkel  $x$  gleich.

§ 37. Fortsetzung. — Aufgaben.

a) Ein Sehnenwinkel ist gleich der Summe derjenigen Peripheriewinkel, welche über den von ihm und seinem Scheitelwinkel eingeschlossenen Bogen stehen.

Beweis (Fig. 49).  $\sphericalangle asb = adb + gbd$  (§ 12,  $\alpha$ ).

b) Ein Secantenwinkel ist gleich der Differenz der Peripheriewinkel, welche auf den von ihm eingeschlossenen Bogen stehen.



Beweis (Fig. 50).  $\sphericalangle asb = adb - gab$  (§ 12  $\alpha$ , § 4 IV).

c) Der geometrische Ort für die Scheitel aller Winkel, welche von gegebener Grösse sind und deren Schenkel durch  $a$  und  $b$  gehen, ist ein Kreis, der  $ab$  zur Sehne hat.



Beweis (Fig. 48). Sei  $g$  der Scheitel eines solchen Winkels. Lege durch  $a, b, g$  einen Kreis. Dann haben 1) alle Peripheriewinkel über  $ab$  die gleiche Grösse (§ 36 d), 2) alle Sehnenwinkel über  $ab$  sind grösser als diese Peripheriewinkel und alle Secantenwinkel kleiner als dieselben (§ 37 a und b). Aus 1) und 2) erweist sich die Behauptung.

**d) Aufgabe:** Von einem Punkte  $a$  (Fig. 51) ausserhalb eines Kreises Tangenten an den Kreis zu ziehen.

**Auflösung.** Die Berührungspunkte sind die Durchschnittspunkte des gegebenen Kreises mit einem andern, der über  $ac$  als Durchmesser errichtet ist (§ 36 d, § 30  $\alpha$ ).

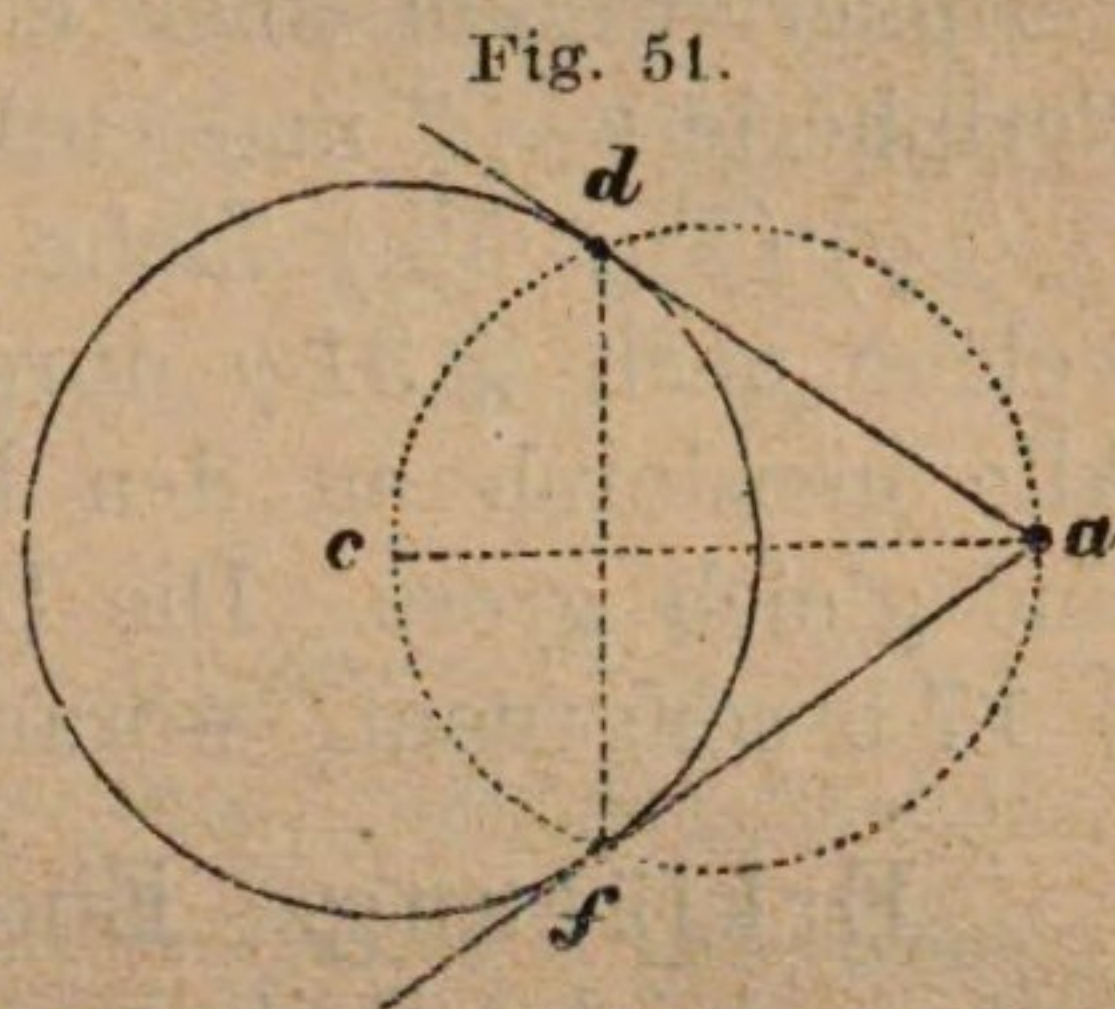


Fig. 51.

**e) Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, welcher über einer Sehne  $ab$  (Fig. 48) einen gegebenen Winkel  $x$  als Peripheriewinkel fasst.

**Auflösung.** Trage den Winkel  $x$  an den einen Endpunkt  $a$  der Sehne an und construire einen Kreis, welcher durch  $a$  und  $b$  geht und den Schenkel  $af$  in  $a$  berührt (§ 33 e).

### Sätze über ein- und umbeschriebene Vielecke.

§ 38.

**Erklärung.** Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck ist ein solches, dessen Ecken Punkte des Kreises sind.

**Erklärung.** Ein dem Kreise umbeschriebenes Vieleck ist ein solches, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind.

**a)** In einem dem Kreise eingeschriebenen Viereck ist die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel gleich  $2 R$ .

**$\alpha$ )** In einem dem Kreise umbeschriebenen Viereck ist die Summe je zweier gegenüberliegender Seiten gleich gross.

**Beweis.** a) Zwei gegenüberliegende Winkel sind Peripheriewinkel, deren Bogen sich zu  $360^\circ$  ergänzen.

b) Man zeige, dass von den gleichen Tangentenabschnitten, welche von einem Eck nach den Berührungspunkten der anliegenden Seiten reichen, immer der eine zu dem einen Paare, der andere zu dem andern Paare gegenüberliegender Seiten gehört.

**b)** Das Rechteck ist das einzige Parallelogramm, um welches ein Kreis beschrieben werden kann.

**$\beta$ )** Der Rhombus ist das einzige Parallelogramm, in welches ein Kreis beschrieben werden kann.



c) Wenn ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck gleiche Seiten hat, so sind auch die Winkel desselben gleich.  $\gamma$ ) Wenn ein dem Kreise umbeschriebenes Vieleck gleiche Winkel hat, so sind auch die Seiten desselben gleich.

Beweis. c) Wenn die Seiten eines dem Kreise eingeschriebenen  $n$ -Ecks gleich sind, so theilen seine Ecken die Peripherie in  $n$  gleiche Theile (§ 36 a). Jeder Vieleckswinkel steht daher als Peripheriewinkel über einem Bogen, welcher den  $n^{\text{ten}}$  Theil der Peripherie  $n-2$  mal enthält. Wende § 36 d an.

$\gamma$ ) (Fig. 52.) Ziehe die Halbirungslinien der Vieleckswinkel, welche nach § 31  $\gamma$  durch den Mittelpunkt des Kreises gehen. Alle hierdurch an den Ecken des Vielecks entstandenen Winkel sind gleich gross. Die Dreiecke  $aCb$ ,  $bCc$ ,  $cCd$  sind also nach § 17 b congruent, woraus die Gleichheit der Vieleckseiten folgt.

Erklärung. Ein Vieleck heisst regelmässig, wenn es lauter gleiche Seiten und Winkel hat.

### § 39. Sätze über regelmässige Vielecke.

a) In einem regelmässigen Vieleck schneiden sich die Mittelsenkrechte einer Seite und die Halbirungslinien der anliegenden Winkel in einem Punkte.  $\alpha$ ) In einem regelmässigen Vieleck schneiden sich die Halbirungslinie eines Winkels und die Mittelsenkrechten der einschliessenden Seiten in einem Punkte.

Beweise (Fig. 52). a) Eine Seite  $ab$  des Vielecks bildet mit den Halbirungslinien der anliegenden Winkel ein Dreieck  $abC$ , welches nach § 18  $\beta$  gleichschenkelig ist. Die Behauptung folgt also aus § 18 d.

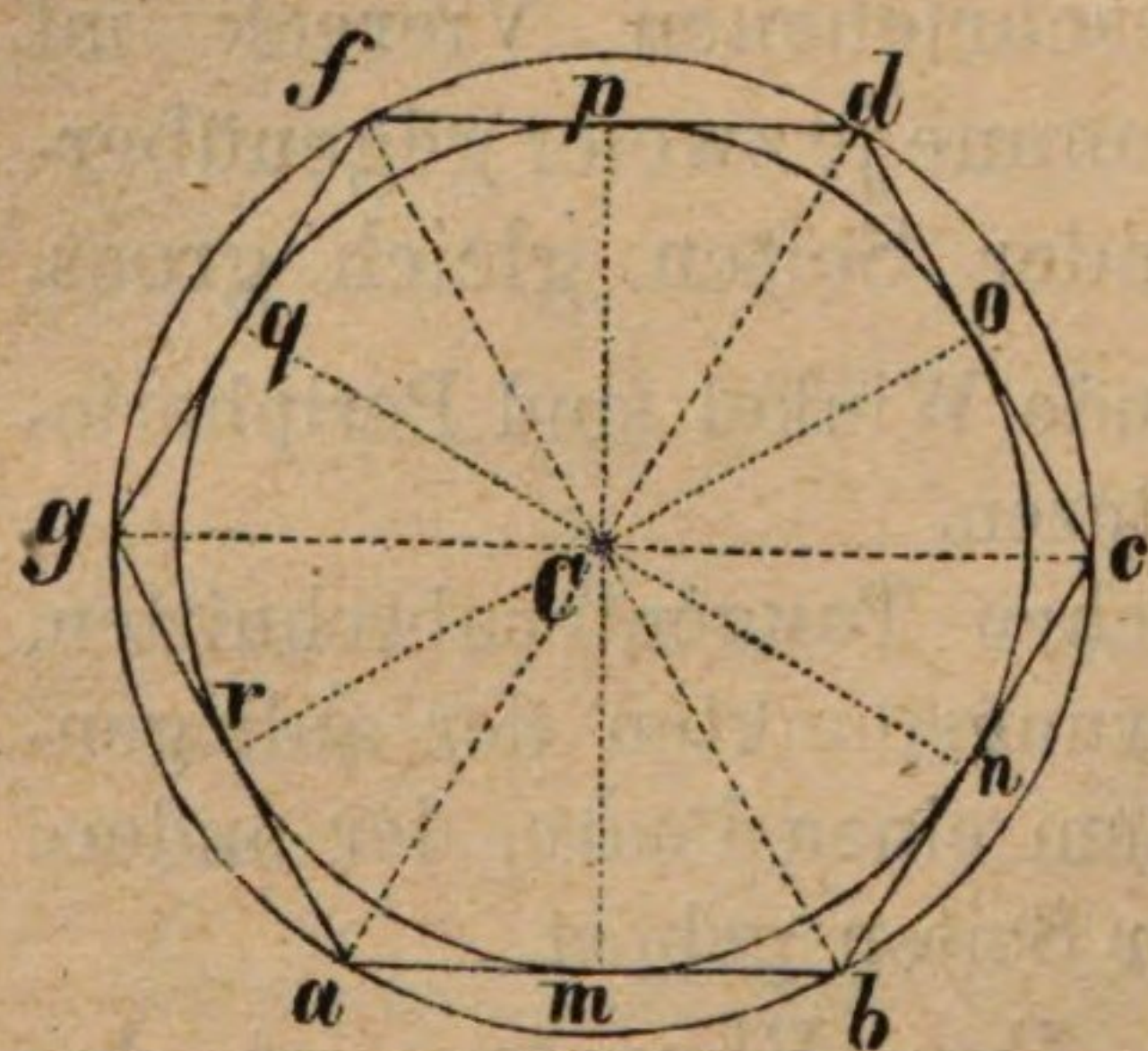


Fig. 52.

$\alpha$ ) Zwei benachbarte Seiten  $ba$  und  $bc$  bilden mit ihren Mittelsenkrechten ein Viereck  $mbnC$ , welches durch die Diagonale  $Cb$  in zwei congruente Dreiecke  $bmc$  und  $bnc$  (§ 21  $\alpha$ ) getheilt wird. Hieraus ergibt sich die Gleichheit der Winkel  $mbC$  und  $nbc$ , womit die Behauptung bewiesen ist.

b) In jedem regelmässigen Vieleck schneiden sich die Mittelsenkrechten der Seiten und die Halbirungslinien der Winkel in einem Punkte, welcher von allen Ecken und von



allen Seiten gleichweit entfernt ist. (Mittelpunkt des Vielecks.)

Beweis (Fig. 52). Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus a) und  $\alpha$ ). Dass aber je zwei auf einander folgende Abstände  $Ca$  und  $Cb$  gleich sind, ergibt sich aus § 23 a, und dass je zwei aufeinander folgende Abstände  $Cm$  und  $Cn$  gleich sind, folgt aus § 23  $\alpha$ .

c) Zusätze. Um und in jedes regelmässige Vieleck lässt sich ein Kreis beschreiben. Die Mittelpunkte dieser Kreise fallen mit dem Mittelpunkte des Vielecks zusammen. Ihre Radien heissen der grosse und kleine Radius des Vielecks.

|                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>d) Die grossen Radien des regelmässigen <math>n</math>-Ecks theilen den Winkelraum um den Mittelpunkt in <math>n</math> gleiche Winkel von <math>\frac{360^\circ}{n}</math> (Centriwinkel des Vielecks).</p> | <p>e) Die grossen und kleinen Radien des regelmässigen <math>n</math>-Ecks theilen den Winkelraum um den Mittelpunkt in <math>2n</math> gleiche Winkel von <math>\frac{360^\circ}{2n}</math>.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Beweise. a) Die Winkel je zweier auf einander folgender grosser Radien sind nach § 36 a gleich gross, woraus die Behauptung folgt.

$\alpha$ ) Der Winkel zweier auf einander folgender grosser Radien wird durch den eingeschlossenen kleinen Radius halbirt, woraus sich die Behauptung ergibt.

#### Fortsetzung. — Aufgaben.

§ 40.

|                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) In einem regelmässigen Vieleck von gerader Seitenzahl fallen je zwei grosse und je zwei kleine Radien in entgegengesetzte Richtung.</p> | <p><math>\alpha</math>) In einem regelmässigen Vieleck von ungerader Seitenzahl fallen je ein grosser und ein kleiner Radius in entgegengesetzte Richtung.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Beweis. Wenn man in einem  $n$ -Eck von einem grossen Radius ausgeht, so wird der  $n^{\text{te}}$  darauf folgende Radius des Vielecks mit jenem einen Winkel von  $n \cdot \frac{360^\circ}{2n} = 180^\circ$  bilden. Dieser  $n^{\text{te}}$  Radius ist aber ein grosser oder ein kleiner Radius, je nachdem  $n$  eine gerade oder ungerade Zahl ist, worin der Beweis liegt.

b) Zusatz. Die grossen und kleinen Radien eines regelmässigen  $n$ -Ecks sind auf  $n$  geraden Linien gelegen. (Regelmässiger  $n$ -Strahl.)



c) Wenn man in den Eckpunkten eines einbeschriebenen regelmässigen Vielecks Tangenten an den Kreis zieht, so bilden dieselben ein regelmässiges Vieleck von gleicher Seitenzahl. Je ein kleiner Radius des einen Vielecks fällt mit einem grossen Radius des andern in die gleiche Richtung.

$\gamma$ ) Wenn man die kleinen Radien eines einbeschriebenen regelmässigen Vielecks verlängert, bis sie den Kreis treffen und in diesen Punkten Tangenten zieht, so entsteht ein regelmässiges Vieleck von gleicher Seitenzahl. Je zwei grosse und je zwei kleine Radien beider Vielecke fallen in dieselbe Richtung.

Beweis. Die Winkel zweier auf einander folgender Tangenten sind gleich gross, da sie den Winkel  $\frac{360^\circ}{n}$  zweier auf einander folgender grosser oder, für den Fall  $\gamma$ , zweier auf einander folgender kleiner Radien zu  $180^\circ$  ergänzen. Die Regelmässigkeit der umbeschriebenen Vielecke ergibt sich also aus § 38  $\gamma$ . Die übrigen Behauptungen sind leicht zu erweisen.

#### Aufgaben.

1) Die Peripherie eines Kreises in zwei, vier, acht, sechzehn gleiche Theile zu theilen oder ein regelmässiges Vier-Acht-Sechzehn-Eck in dieselbe einzubeschreiben.

Auflösung: Die Zweitheilung des Kreises geschieht durch einen, die Theilung in vier Theile durch zwei auf einander senkrechte Durchmesser. Um die Theilung in acht Theile zu erhalten, muss man die Winkel der Viertheilung halbiren u. s. w.

2) Die Peripherie eines Kreises in drei, sechs, zwölf gleiche Theile zu theilen oder ein regelmässiges Drei-Sechs-Zwölf-Eck in dieselbe einzubeschreiben.

Auflösung (Fig. 52): Wenn in dem Kreise  $C$  die Sehne  $ab$  dem Radius gleich ist, so ist  $aCb$  ein gleichseitiges Dreieck und der Winkel  $aCb$  beträgt  $60^\circ$ . Der Bogen  $ab$  ist somit der sechste Theil der Kreislinie. Um aus der so ausgeführten Theilung in sechs Theile die Dreitheilung zu erhalten, muss man die abwechselnden Theilpunkte verbinden. Die Zwölftheilung erhält man, indem man von den Endpunkten zweier senkrechter Durchmesser aus die Sechs-Theilung ausführt. Der Beweis liegt darin, dass der Mittelpunktswinkel der Zwölftheilung die Differenz der Winkel der Vier- und der Sechstheilung ist.



## Uebungen.

## § 41.

1)  $\alpha$ ) In einem gegebenen Punkte eines Kreises eine Tangente zu ziehen.  $\beta$ ) Auf einer gegebenen Tangente eines Kreises den Berührungspunkt genau zu finden.

2)  $\alpha$ ) Wenn ein Kreis durch eine Tangente und den Mittelpunkt bestimmt ist, so soll man durch einen beliebigen Punkt dieser Tangente eine zweite Tangente ziehen ohne den Kreis zu zeichnen.  $\beta$ ) Es sei ein Punkt  $p$  eines Kreises gegeben und ausserdem sei bekannt, dass der Mittelpunkt desselben auf einer gegebenen Geraden  $G$  liege. Man soll den zweiten Schnittpunkt des Kreises mit einer Linie bestimmen, welche durch  $b$  senkrecht auf  $G$  gezogen ist.

3) An einen Kreis eine Tangente zu legen, welche  $\alpha$ ) mit einer gegebenen Geraden parallel ist,  $\beta$ ) mit einer gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bildet.

4) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, welche mit gegebenem Radius beschrieben  $\alpha$ ) durch einen gegebenen Punkt gehen,  $\beta$ ) eine gegebene Gerade berühren.

5) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu bestimmen, welche zwei parallele Gerade berühren.

6) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte gleicher Sehnen zu bestimmen.

7) Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu bestimmen, von welchen aus an einen gegebenen Kreis Tangenten von bestimmter Länge gezogen werden können.

8) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte rechtwinklig schneiden?

9) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher  $\alpha$ ) durch 2 gegebene Punkte geht,  $\beta$ ) eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt,  $\gamma$ ) zwei gegebene Gerade berührt.

10) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, wenn  $\alpha$ ) die Grundlinie und der Radius des einbeschriebenen Kreises,  $\beta$ ) die Grundlinie und der Radius des umbeschriebenen Kreises gegeben ist.

11) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu finden, welche mit gegebenem Radius beschrieben sind und  $\alpha$ ) einen gegebenen Kreis berühren,  $\beta$ ) mit einem gegebenen Kreise eine Sehne von gegebener Länge gemein haben,  $\gamma$ ) einen gegebenen Kreis halbiren, d. h. in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden.

12) Wie gross sind die Peripheriewinkel, welche  $\alpha$ ) über dem 3., 4., 10. Theile der Peripherie,  $\beta$ ) über Bogen von  $18^\circ 6' 20''$ ,  $27^\circ 2' 6'$  stehen?

13) Wie gross (in Gradmass) sind die Bogen, welche zu Peripheriewinkeln von  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $179^\circ$  gehören?

14) Die nämlichen Aufgaben für die Winkel einer Sehne und Tangente zu lösen.

15) 4 Punkte theilen den Kreis in 4 auf einander folgende Bogen von  $20^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $160^\circ$ . Wie gross sind die Winkel, welche man



erhält, wenn die 4 Punkte paarweise durch Gerade verbunden werden (auf 3 Arten)?

16) Ein Secantenwinkel von  $16^\circ$  steht über einem Kreisbogen von  $40^\circ$ . Wie gross ist der Kreisbogen, welcher zwischen seinen Schenkeln liegt?

17) In einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, welches gegebene Winkel hat.

18) Die Höhen eines Dreiecks halbiren die Winkel des von den Fusspunkten gebildeten Dreiecks.

19) Die Tangente in einem Kreispunkte zu zeichnen, ohne den Mittelpunkt zu kennen (§ 36 e).

20) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, welche (deren Verlängerungen) durch einen gegebenen Punkt gehen?

21) Zwischen zwei Punkten  $a$  und  $b$  einen Kreisbogen von  $18^\circ$  zu zeichnen.

22) Einen Punkt zu finden, von welchem aus zwei an einander stossende Strecken unter gegebenen Winkeln gesehen werden.

23) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist:

$\alpha$ ) Die Hypotenuse und die Höhe.

$\beta$ ) Die Hypotenuse und der Radius des einbeschriebenen Kreises.

24) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem gegeben ist:

$\alpha$ ) Die Grundlinie, der gegenüberliegende Winkel und die Höhe.

$\beta$ ) Eine Seite und die den andern Seiten zugehörigen Höhen.

$\gamma$ ) Die Winkel und der Radius des einbeschriebenen Kreises.

25) An zwei Kreise die äussern gemeinschaftlichen Tangenten (diejenigen, bei welchem die Kreise auf derselben Seite liegen) zu legen.

Andeutung. Man ziehe mit der Differenz der Radien um den Mittelpunkt des grössern Kreises einen neuen Kreis und lege durch den Mittelpunkt des kleinern Kreises Tangenten an denselben.

26) An zwei Kreise die innern gemeinschaftlichen Tangenten zu zeichnen. (Verwende die Summe der beiden Radien.)

27) Die zwischen den Berührungspunkten liegenden Abschnitte der beiden äussern Tangenten sind  $\alpha$ ) einander gleich,  $\beta$ ) gleich dem von den beiden äussern Tangenten begrenzten Abschnitte einer innern Tangente.

28) Von den 4 Kreisen, welche die Seiten eines Dreiecks berühren, heisst der eine einbeschrieben, die 3 andern anbeschrieben. Von ihren Berührungspunkten gelten folgende Sätze:

Die in der Richtung einer Dreiecksseite gemessene Strecke von einem Eck bis

$\alpha$ ) zu den Berührungspunkt des einbeschriebenen Kreises ist gleich der halben Summe der 3 Seiten weniger der gegenüberliegenden Seite.

$\beta$ ) zu dem Berührungspunkt des der gegenüberliegenden Seite anbeschriebenen Kreises ist gleich der halben Summe der Seiten.

$\gamma$ ) zu dem Berührungspunkte des dieser Seite anbeschriebenen Kreises ist gleich der halben Summe der 3 Seiten weniger der zweiten Seite, welche durch den gewählten Eckpunkt geht.

29) Jede Dreiecksseite wird durch den Berührungspunkt des ein- und anbeschriebenen Kreises in drei Abschnitte getheilt, von denen die beiden äussern einander gleich sind.



30) Die Mittelpunkte zweier Höhenabschnitte, welche von den Ecken des Dreiecks bis zu dem Schnittpunkte der Höhen reichen (obere Abschnitte), bilden mit den Mittelpunkten der diesen Höhen zugehörigen Seiten ein Rechteck (§ 28  $\gamma$ ).

Die Fusspunkte der beiden Höhen liegen auf demjenigen Kreise, welcher um dieses Rechteck beschrieben ist.

31) Die Mittelpunkte der obern Höhenabschnitte, die Fusspunkte der Höhen und die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks liegen auf einem Kreise (Feuerbach'scher Kreis).

32) Um ein gleichschenkliges Trapez lässt sich ein Kreis beschreiben.

33) Wenn ein Sechseck einem Kreise einbeschrieben ist, so beträgt die Summe des 1., 3. und 5. Winkels 4 Rechte.

34) Wenn man aus einem Eckpunkte eines einbeschriebenen  $n$ -Ecks die Diagonalen zieht und zugleich die Tangente dieses Eckpunktes construirt, so entsteht ein regelmässiger  $n$ -Strahl.

35) In einem regelmässigen  $n$ -Eck von gerader Seitenzahl bestimmen je zwei gegenüberliegende Seiten ein Rechteck.

36) In einem solchen Vieleck wird jede durch den Mittelpunkt gezogene Gerade in dem Mittelpunkte halbt.

36) Ueber einer gegebene Strecke ein regelmässiges 8-Eck zu zeichnen.

38) Von einem regelmässigen Sechseck ist der kleine Radius gegeben, man soll dasselbe zeichnen.

39) Ein regelmässiges Vieleck von gerader Seitenzahl ist gegeben. Man soll über der Seite desselben ein regelmässiges Vieleck von doppelter Seitenzahl zeichnen.

## Anhang zu dem zweiten Cursus.

### I. Abschnitt.

#### Das Princip der Dualität. — Beziehungen zwischen Vielecken und Curven.

##### Das Princip der Dualität.

§ 42\*.

Zu vielen Definitionen und Sätzen der Geometrie kann man ein Seitenstück dadurch finden, dass man die Ausdrücke Punkt und Gerade und daher auch die Ausdrücke Punktreihe und Strahlenbüschel, Winkel und Strecke, mit einander vertauscht. Dieses sogenannte Gesetz der Reciprocität oder Dualität gilt unumschränkt nur in demjenigen Theil der Geometrie, welcher lediglich von der Lage geometrischer Gebilde handelt



(Geometrie der Lage. — Neuere Geometrie). Doch sind auch in den übrigen Theilen der Geometrie vielfache Andeutungen dieses Gesetzes enthalten, wie der Inhalt des Bisherigen lehrt.

Es folgen zum Belege des Gesagten einige Sätze, welche sich reciprok gegenüberstehen.

a) Wenn man einen Punkt der Ebene mit einem zweiten, diesen mit einem dritten u. s. w. durch Gerade verbindet und zuletzt wieder zu dem ersten Punkte zurückkehrt, so erhält man ein einfaches Vieleck, dessen Ecken jene Punkte sind.

Ein einfaches  $n$ -Eck enthält  $n$  Ecken und  $n$  Seiten.

Das einfache  $n$ -Eck und  $n$ -Seit sind identische Figuren.

b) Es giebt verschiedene  $n$ -Ecke, deren Ecken durch  $n$  gegebene Punkte dargestellt sind.

$\alpha$ ) Wenn man eine Gerade der Ebene mit einer zweiten, diese mit einer dritten u. s. w. schneidet, und zuletzt wieder zu der ersten Geraden zurückkehrt, so erhält man ein einfaches Vielseit, dessen Seiten jene Geraden sind.

Ein einfaches  $n$ -Seit enthält  $n$  Seiten und  $n$  Ecken.

$\beta$ ) Es giebt verschiedene  $n$ -Seite, deren Seiten in  $n$  gegebenen Geraden liegen.

#### Beispiel.

Wenn man in einem gewöhnlichen regelmässigen  $n$ -Eck nicht die auf einander folgenden Ecken verbindet, sondern je einen oder je zwei etc. Eckpunkte auslässt, so erhält man andere regelmässige einfache  $n$ -Ecke, welche mit dem Namen der regelmässigen Vielsterne bezeichnet werden.

Die regelmässigen Vielsterne können auch in mehrere einfache Vielecke von geringerer Seitenzahl zerfallen.

c) Ein vollständiges  $n$ -Eck ist ein System von  $n$  Punkten mit allen ihren Verbindungslinien (Seiten) oder, was dasselbe ist, ein einfaches  $n$ -Eck mit seinen sämtlichen Diagonalen.

Wenn man ein gewöhnliches regelmässiges  $n$ -Eck als  $n$ -Seit betrachtet und nicht die Schnittpunkte auf einander folgender Seiten bestimmt, sondern je eine oder je zwei etc. Seiten auslässt, so entstehen ebenfalls regelmässige einfache  $n$ -Seite, welche als Vielsterne bezeichnet werden.

$\gamma$ ) Ein vollständiges  $n$ -Seit ist ein System von  $n$  Geraden mit ihren sämtlichen Schnittpunkten (Ecken) oder, was dasselbe ist, ein einfaches  $n$ -Seit mit den sämtlichen Schnittpunkten seiner Seiten.

Hierbei wird angenommen, dass im  $n$ -Eck keine drei Eckpunkte auf einer Geraden liegen und im  $n$ -Seit keine drei Gerade durch einen Punkt gehen.



d) In jedem Eckpunkte eines vollständigen  $n$ -Ecks schneiden sich  $(n-1)$  Seiten. Die Anzahl aller Seiten ist  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

o) Auf jeder Seite eines vollständigen  $n$ -Seits liegen  $(n-1)$  Eckpunkte. Die Anzahl aller Eckpunkte ist  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

Beispiel.

4 Punkte  $a, b, c, d$  (Fig. 53) mit ihren 6 Verbindungslinien

4 Gerade  $ab, bc, cg, ga$  (Fig. 54) mit ihren 6 Schnittpunkten

Fig. 53.

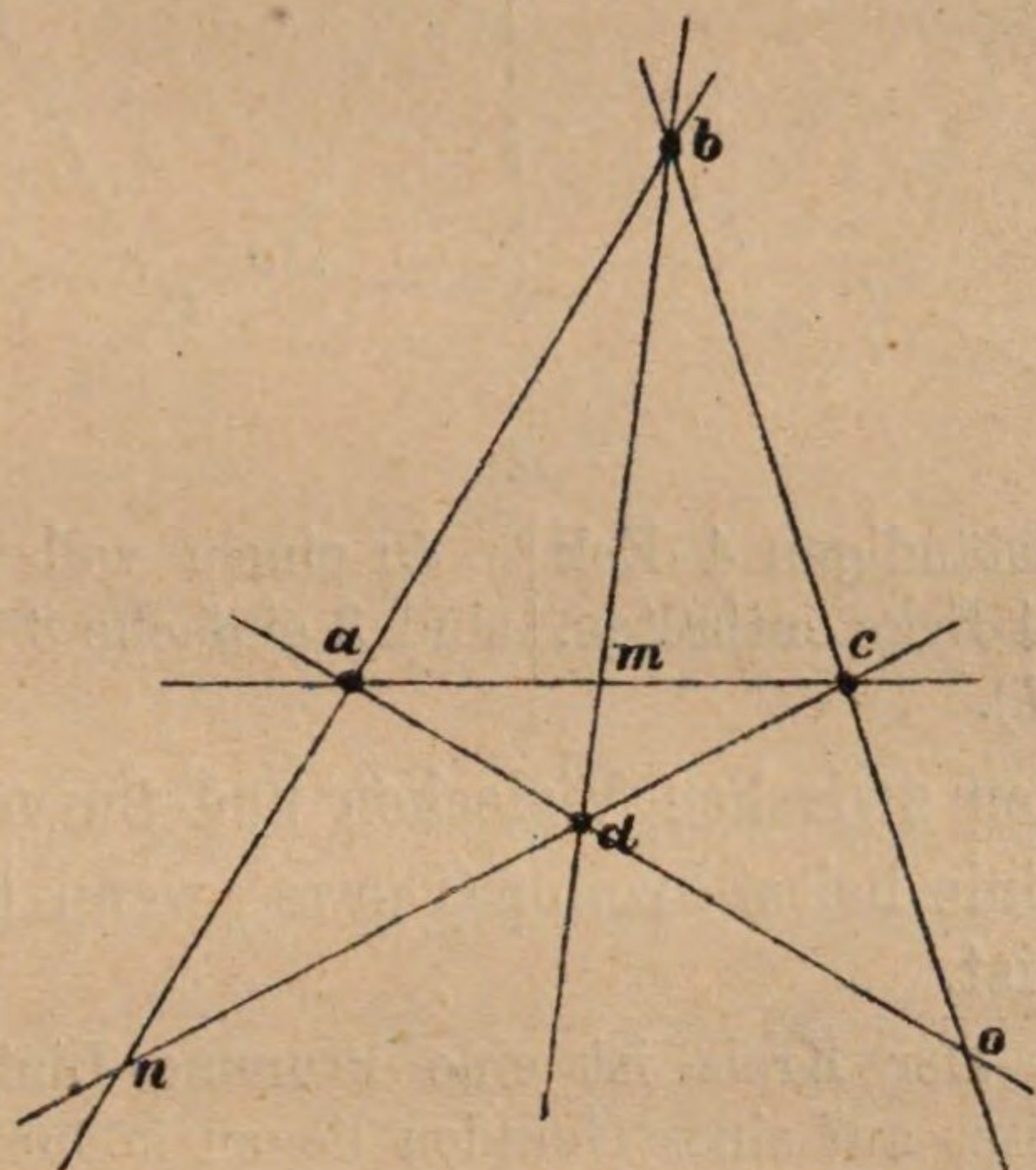
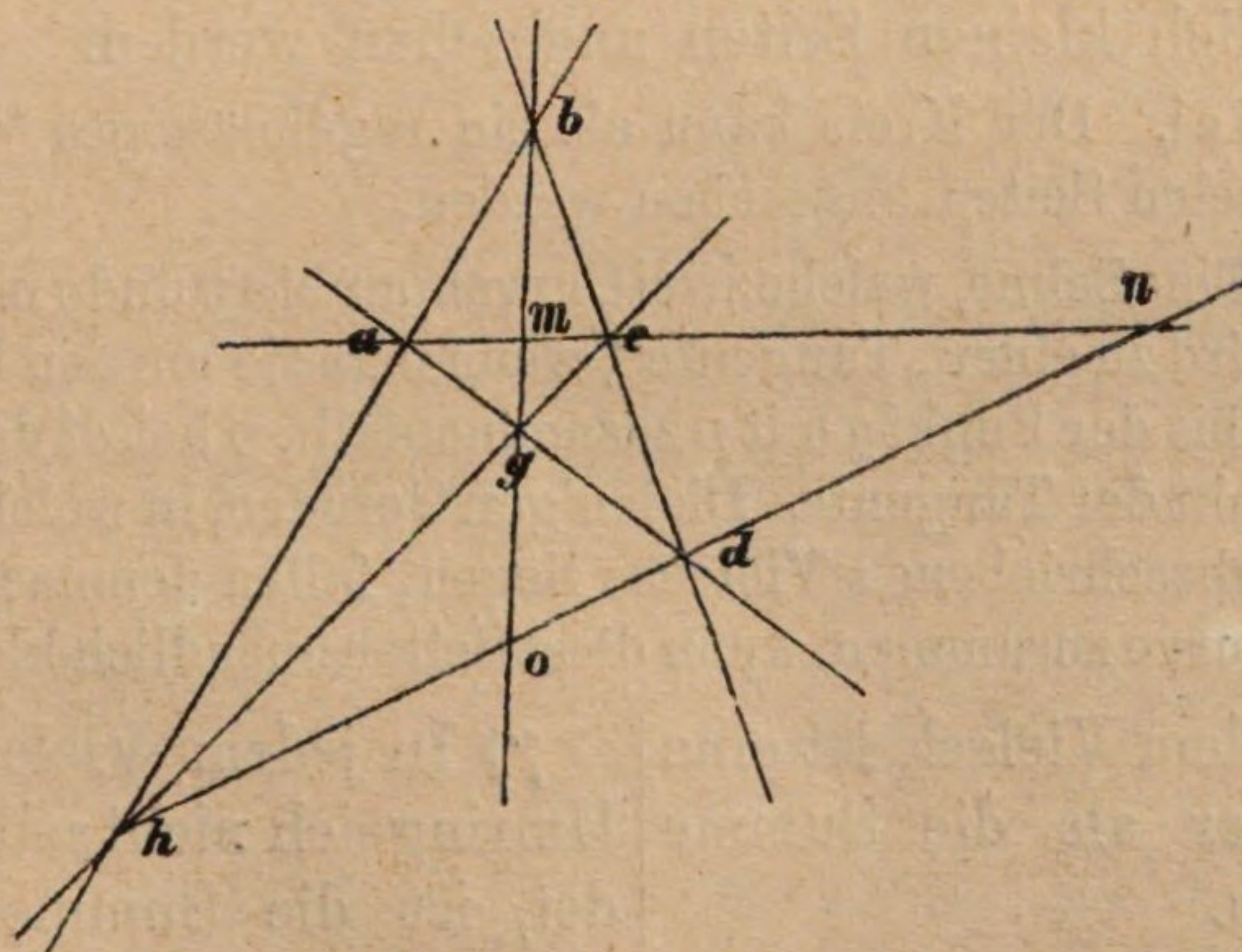


Fig. 54.



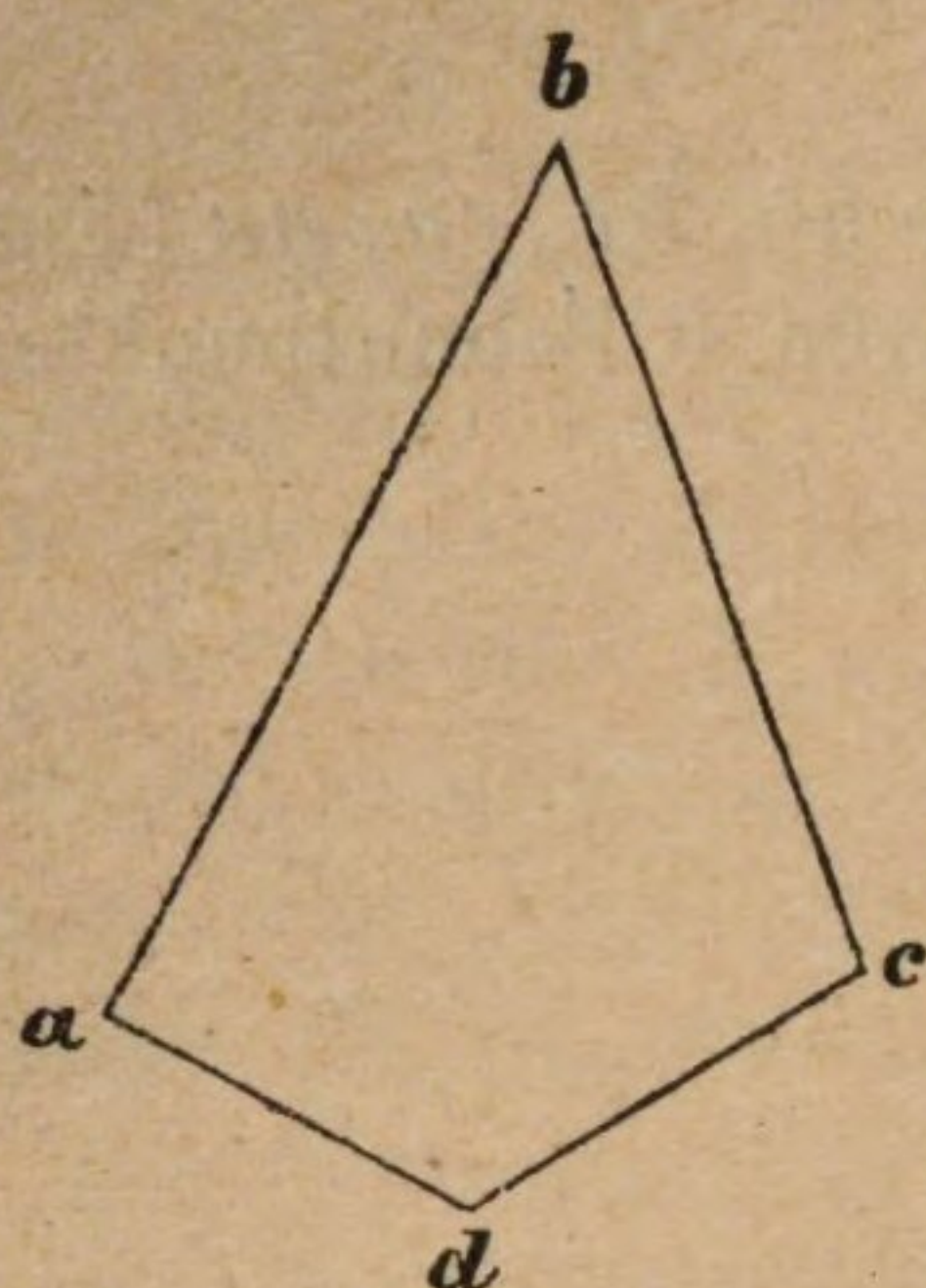
bilden ein vollständiges Viereck. Die 6 Seiten desselben schneiden sich paarweise in drei neuen Punkten  $m, n, o$ , welche Neben-

bilden ein vollständiges Vierseit. Die 6 Eckpunkte desselben liegen paarweise auf drei neuen Geraden  $ac, bg, hd$ , welche Diagonalen



ecken des vollständigen Vierecks heissen. Zwei Seiten, welche sich in einem Nebeneck schneiden, heissen Gegenseiten.

Fig. 55.



des vollständigen Vierseits heissen. Zwei Eckpunkte, welche auf einer Diagonalen liegen, heissen Gegenpunkte.

Fig. 56.

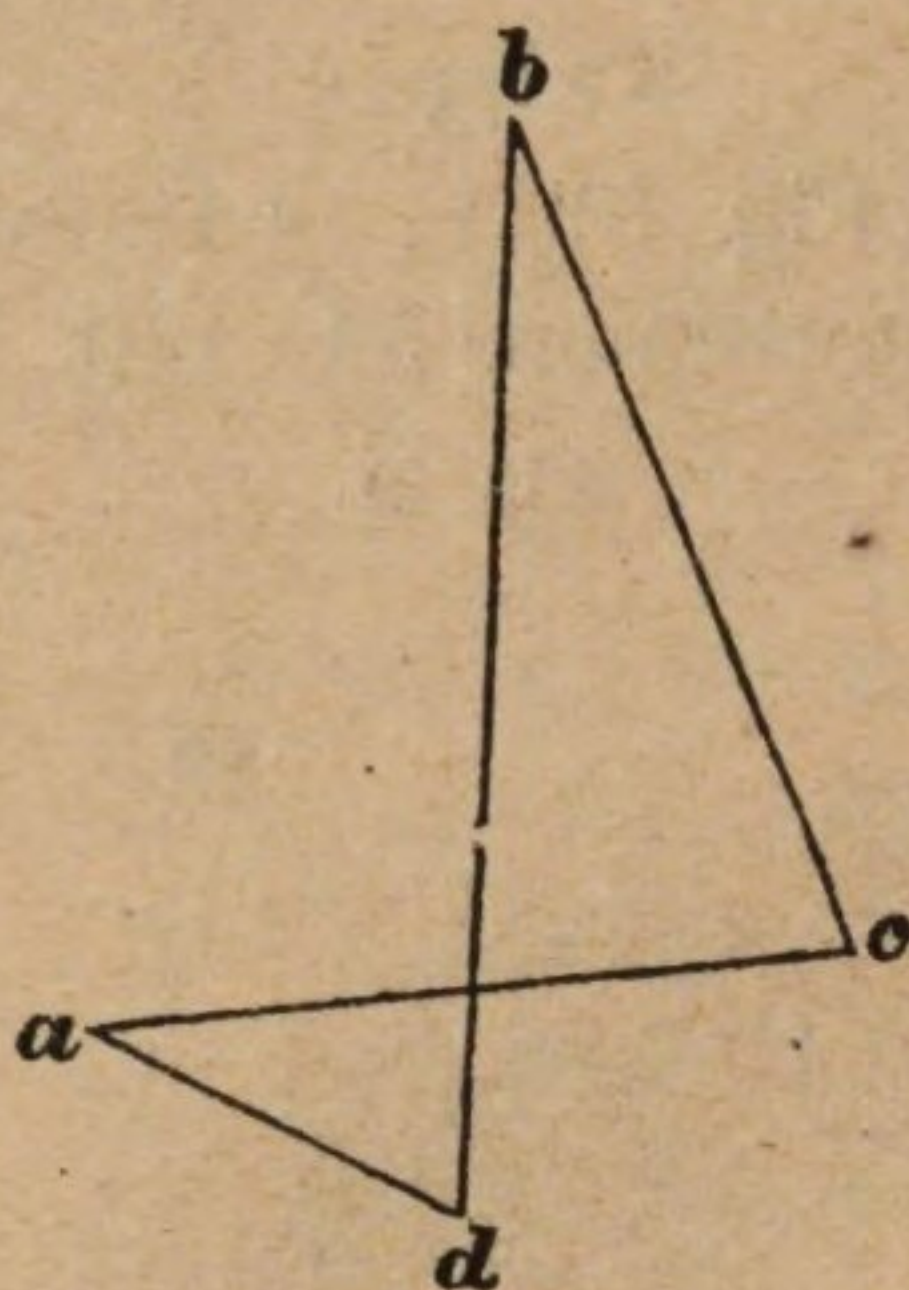
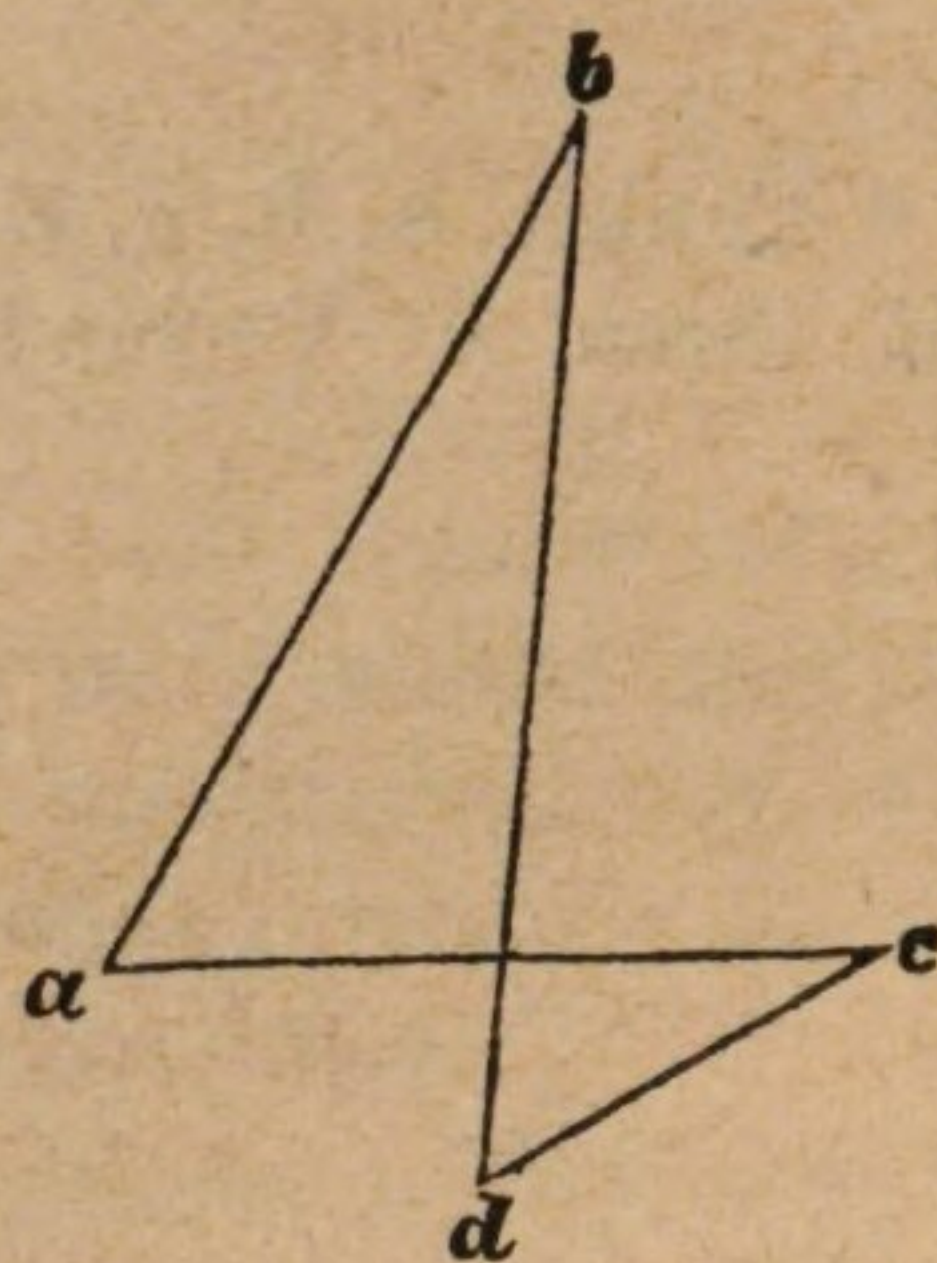


Fig. 57.



In einem vollständigen 4-Eck sind 3 einfache 4-Ecke enthalten. (Fig. 55, 56, 57).

In einem vollständigen 4-Seit sind 3 einfache 3-Seite enthalten.

#### § 43. Beziehungen zwischen Vielecken und Curven.

a) Eine Linie heisst krumm (Curve), wenn kein Theil derselben gerade ist.

Beispiel. Der Kreis ist eine krumme Linie, weil nie 3 Punkte des Kreises auf einer Geraden liegen können (§ 23 c).

b) Eine Curve kann als ein Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten angesehen werden.

Beispiel. Der Kreis kann als ein regelmässiges Vieleck von unendlich vielen Seiten angesehen werden.

Anm. Eine Sehne, welche zwei Curvenpunkte  $p$  und  $q$  mit einander verbindet, wird zu einer „Tangente“, wenn man sie um den Punkt  $p$  so lange dreht, bis der Punkt  $q$  mit  $p$  zusammenfällt.  $p$  heisst dann der Berührungspunkt der Tangente. Diejenigen Geraden, in welchen die Seiten eines eingeschriebenen Vielecks liegen, fallen demnach mit Tangenten der Curve zusammen, wenn diese Seiten unendlich klein werden.

c) In jedem Vieleck ist eine Seite kleiner als die Summe der übrigen.

γ) In jedem Vieleck, dessen Umringsich nicht selbst schneidet, ist die Summe der Verlängerungen zweier Seiten bis zu ihrem Schnittpunkte grösser als die Summe der eingeschlossenen Seiten.



Beweis. c) Ersetzt man in dem gebrochenen Weg  $abcd$  (Fig. 58) den Weg  $abc$  durch die kürzere Strecke (§ 20  $\gamma$ )  $ac$ , so erhält man  $ab + bc + cd > ac + cd$ .

Fig. 58.

Da aber  $ac + cd$  selbst wieder grösser als  $ad$  ist, so gilt um so mehr  $ab + bc + cd > ad$ . Ebenso wird der Satz für eine grössere Seitenzahl bewiesen.

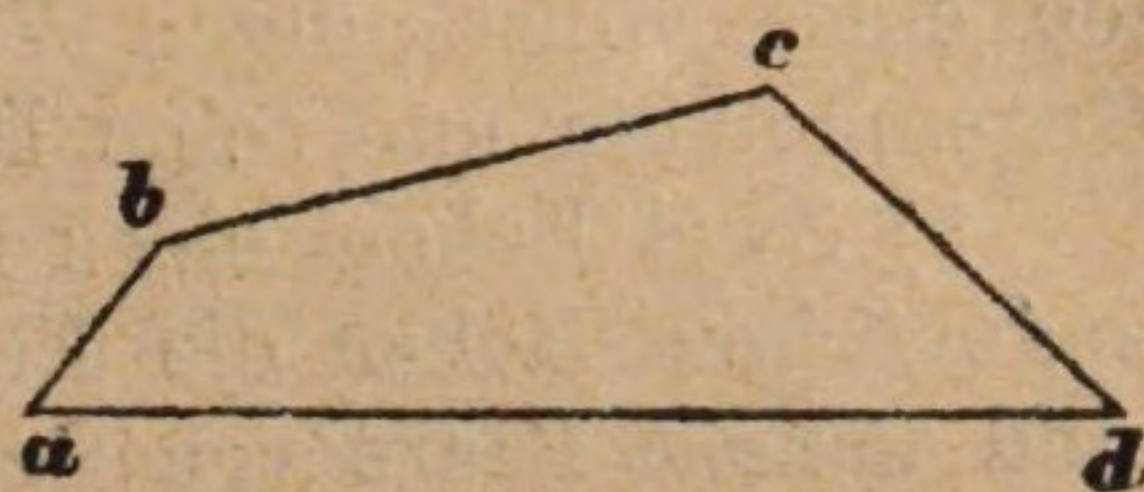


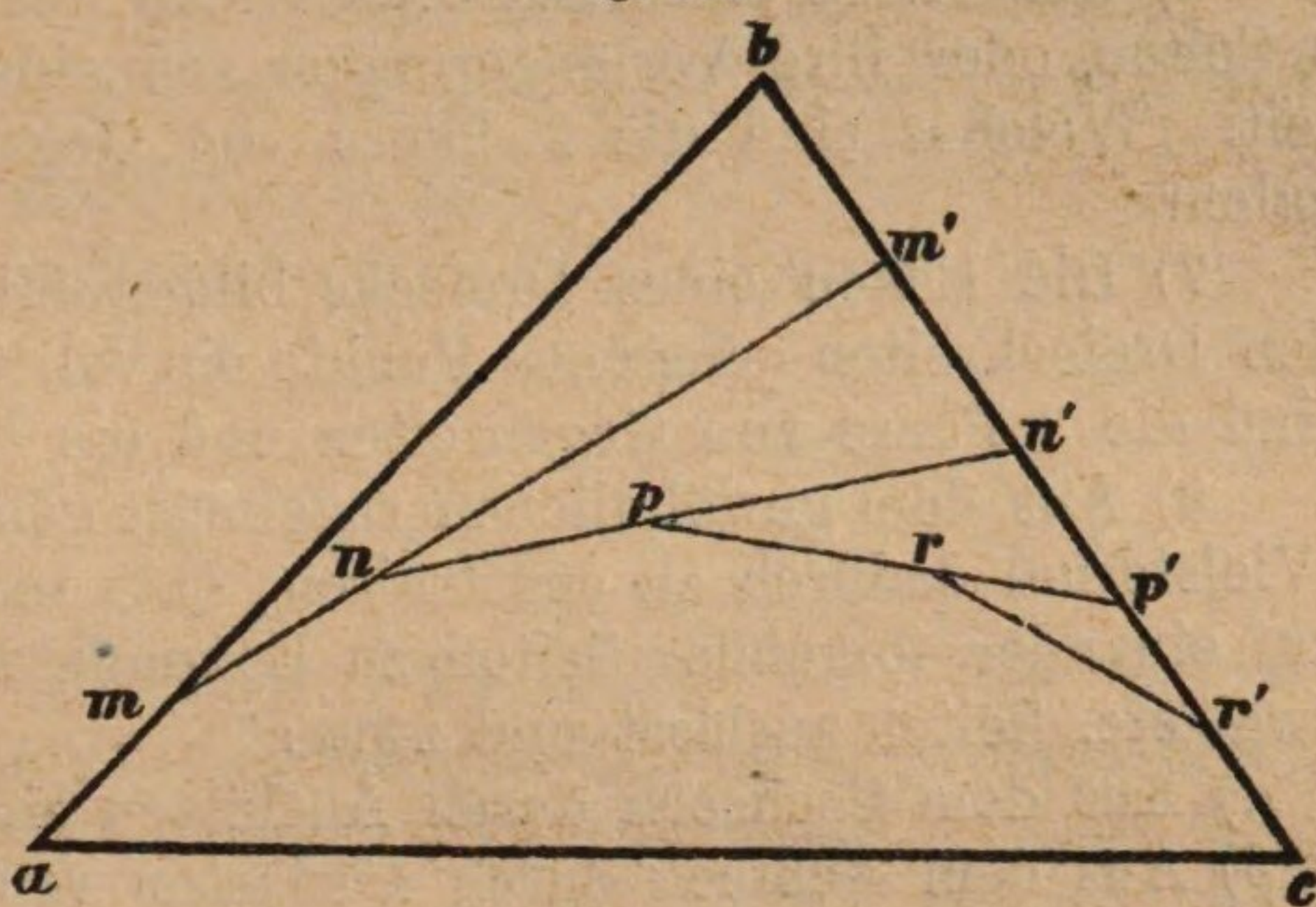
Fig. 59.

$\gamma$ ) Ersetzt man in dem Wege  $mb + br'$  (Fig. 59) die gebrochene Linie  $mbm'$

durch die kürzere (§ 20  $\gamma$ )  $mm'$ , so erhält man  $mb + br' > mm' + m'r'$ . Ersetzt man aber in dem letzteren Weg  $nm' + m'n'$

durch die kleinere Strecke  $nn'$ , so gilt um

so mehr  $mb + br' > mn + nn' + n'r'$ . Auf solche Weise weiter schliessend erhält man zuletzt  $mb + br' > mn + np + pr + rr'$ . Ebenso wird der Beweis bei grösserer Seitenzahl geführt.



d) Eine Sehne ist kleiner als der Kreisbogen (Curvenbogen) zwischen ihren Endpunkten. (§ 43 b und c.)

δ) Die Summe der Strecken, welche von den Berührungspunkten zweier Tangenten bis zu ihrem Schnittpunkte reichen, ist grösser als der dazwischen liegende Kreisbogen. (§ 43 b und  $\gamma$ .)

e) Der Umring eines eingeschriebenen Vielecks ist kleiner als die Peripherie des Kreises.

ε) Der Umring eines umschriebenen Vielecks ist grösser als die Peripherie des Kreises.

### Uebungen.

§ 44\*.

1) Betrachte die Ecken eines Parallelogramms als Ecken eines vollständigen Vierecks. Suche die 3 Paare von Gegenseiten und die Nebenecken (§ 10, Anmerkung).

2) Betrachte die Seiten eines Parallelogramms als Seiten eines vollständigen Vierseits. Suche die 3 Paare von Gegenpunkten und die Diagonalen (§ 10, Anmerkung).



3) Wie viele Seiten hat ein vollständiges Fünfeck, wie viele Ecken ein vollständiges Fünfseit?

4) Zwei Dreieckseiten bilden mit den zugehörigen Höhen die Seiten eines vollständigen Vierseits. Welches sind seine 3 Paare von Gegenpunkten und seine Diagonalen?

5) Zwei Ecken eines Dreiecks bilden mit den Fusspunkten der zugehörigen Höhen die Ecken eines vollständigen Vierecks. Welches sind seine 3 Paare von Gegenseiten und seine Nebenecken?

6) Die Seiten eines Dreiecks bilden mit einer Geraden, welche die 3 Seiten oder ihre Verlängerungen schneidet, ein vollständiges Vierseit. Welches sind die 3 Paare von Gegenpunkten und die Diagonalen?

7) Die Ecken eines Dreiecks bilden mit irgend einem nicht auf den Dreieckseiten gelegenen Punkte ein vollständiges Viereck. Welches sind die 3 Paare von Gegenseiten und die Nebenecken?

8) Aus dem gewöhnlichen regelmässigen Vieleck einfache Vielecke (Vielsterne) dadurch zu construiren, dass man nicht die Schnittpunkte auf einander folgender Seiten zu Eckpunkten annimmt, sondern eine, zwei etc. Seiten auslässt und zwar:

$\alpha$ ) Aus dem Sechseck durch Auslassen einer Seite.

$\beta$ ) Aus dem Achteck durch Auslassen von 1, 2 Seiten.

$\gamma$ ) Aus dem Zwölfeck durch Auslassen von 1, 2, 3, 4 Seiten.

$\delta$ ) Aus dem Fünfeck durch Auslassen von einer Seite.

$\varepsilon$ ) Aus dem Zehneck durch Auslassen von 1, 2, 3 Seiten.

Welche dieser Vielsterne zerfallen in 2 oder 3 Vielsterne von geringerer Seitenzahl?

9) Aus dem gewöhnlichen regelmässigen Vieleck einfache Vielecke (Vielsterne) dadurch zu construiren, dass man nicht auf einander folgende Ecken verbindet, sondern 1, 2, 3 Ecken auslässt und zwar:

$\alpha$ ) Aus dem Sechseck durch Auslassen von einem Eck.

$\beta$ ) Aus dem Achteck durch Auslassen von 1, 2 Ecken.

$\gamma$ ) Aus dem Zwölfeck durch Auslassen von 1, 2, 3, 4 Ecken.

$\delta$ ) Aus dem Fünfeck durch Auslassen von einem Eck.

$\varepsilon$ ) Aus dem Zehneck durch Auslassen von 1, 2, 3 Ecken.

10) Die Winkel an den Spitzen eines regelmässigen Fünfsterns betragen  $2 R$ .

11) In einem regelmässigen Siebenstern ist die Summe der Winkel an den Spitzen  $6 R$ , wenn dasselbe durch Auslassen von je einem Eckpunkte gebildet ist (9) und  $2 R$ , wenn dasselbe durch Auslassen von je zwei Eckpunkten gebildet wurde.

## II. Abschnitt.

### Congruenz der Figuren.

§ 45°. Lagen congruenter Figuren gegen einander.

a) Zwei Figuren sind congruent, wenn sie sich so auf einander legen lassen, dass sie sich decken.



b) Die hierbei sich deckenden Seiten, Eckpunkte und Winkel werden entsprechend genannt.

c) Man denke sich zwei congruente Figuren in Deckung. Wenn man die eine derselben verschiebt, so erhält man neue Lagen der beiden Figuren. Die Figuren heissen in allen diesen Lagen congruent und von gleichem Sinne.

d) Wenn man congruente Figuren gleichen Sinnes so legt, dass zwei entsprechende Seiten mit entsprechenden Endpunkten auf einander fallen, so decken sich die Figuren. (Denn sie sind wieder in ihre anfängliche Lage zurückgekommen.)

e) Wenn man congruente Figuren gleichen Sinnes so legt, dass zwei entsprechende Seiten mit verwechselten Endpunkten auf einander fallen, so sind je zwei entsprechende Punkte der Figuren symmetrisch gegen den Mittelpunkt der gemeinsamen Seite gelegen (centrisch symmetrische Figuren\*).

β) In congruenten Figuren sind entsprechende Stücke einander gleich.

γ) Man denke sich zwei congruente Figuren in Deckung. Wenn man die eine derselben umwendet und sodann verschiebt, so erhält man neue Lagen der beiden Figuren. Die Figuren heissen in allen diesen Lagen congruent und von entgegengesetztem Sinne.

δ) Wenn man congruente Figuren entgegengesetzten Sinnes so legt, dass zwei entsprechende Seiten mit entsprechenden Endpunkten auf einander fallen, so sind je zwei entsprechende Punkte der Figuren symmetrisch gegen die gemeinsame Seite gelegen (einxig symmetrische Figuren\*).

ε) Congruente Figuren entgegengesetzten Sinnes kann man nicht zur Deckung bringen, wenn man nicht die eine derselben umwendet.

---

\*) Anmerkung: Man spreche die Definition solcher Figuren aus (siehe § 23, Anmerkung und § 25, Erklärung).



Beweise.  $\delta$ ) Je zwei entsprechende Punkte der Figuren bilden mit den Endpunkten der gemeinsamen Seite ein Deltoid (§ 16  $\delta$ ). Der Abstand der beiden Punkte wird daher durch die gemeinsame Seite senkrecht halbirt (§ 23 a), worin der Beweis liegt (§ 23, Anmerkung).

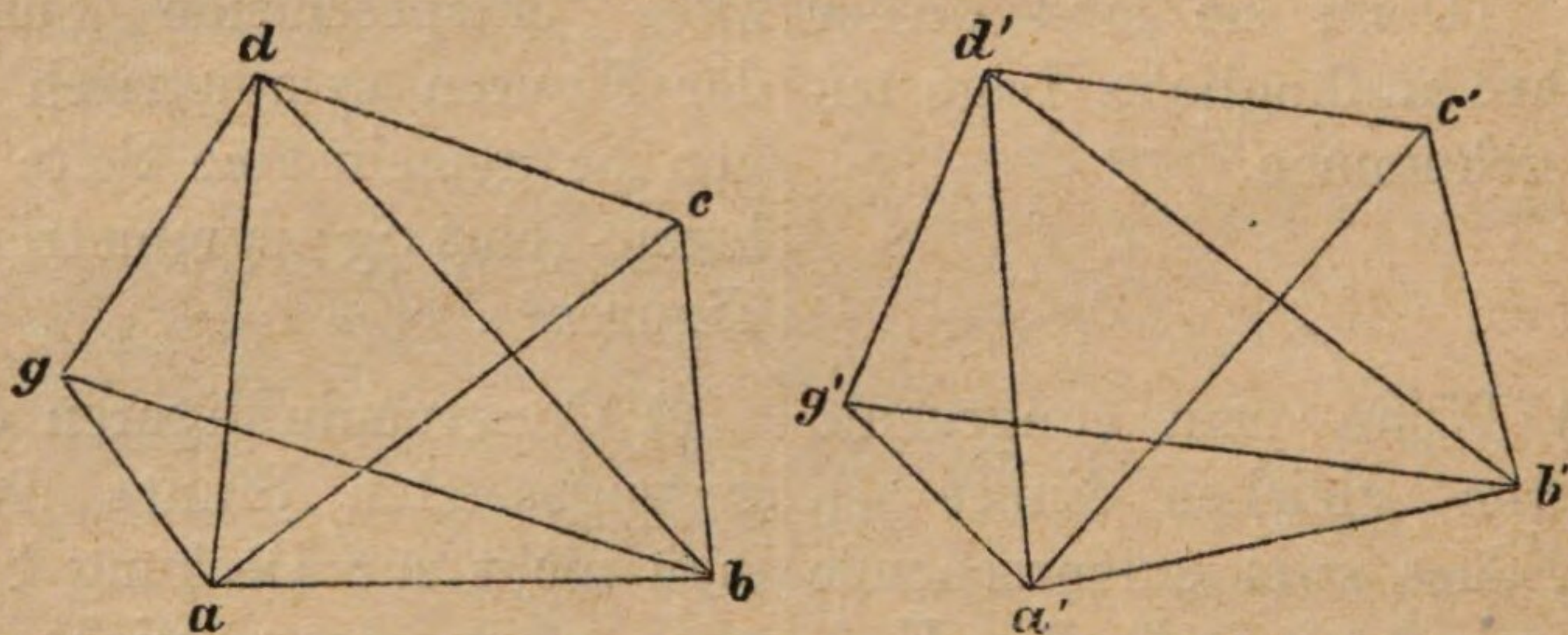
e) Je zwei entsprechende Punkte bilden mit den Endpunkten der gemeinsamen Seite ein Parallelogramm (§ 16 e). Der Abstand dieser Punkte und die gemeinsame Seite halbiren sich daher gegenseitig (§ 25 d), worin der Beweis gelegen ist (§ 25, Erklärung).

#### § 46\*. Bedingungen für die Congruenz geradliniger Figuren.

a) Zwei Figuren sind congruent und von gleichem Sinne, wenn die Punkte der einen Figur mit einer beliebigen Seite derselben Dreiecke bilden, welche mit den entsprechenden Dreiecken der andern Figur congruent und von gleichem Sinne sind.

$\alpha$ ) Zwei Figuren sind congruent und von entgegengesetztem Sinne, wenn die Punkte der einen Figur mit einer beliebigen Seite derselben Dreiecke bilden, welche mit den entsprechenden Dreiecken der andern Figur congruent und von entgegengesetztem Sinne sind.

Fig. 60.



Beweise. a)  $ab$  sei die gewählte Seite, so dass der Voraussetzung nach die Dreiecke  $abc, abd, abg \dots$  der einen Figur mit den entsprechenden Dreiecken  $a'b'c', a'b'd', a'b'g' \dots$  der Reihe nach congruent und von gleichem Sinne sind. Man lege die Figuren so auf einander, dass die gleichen Seiten  $ab$  und  $a'b'$  sich decken. Dann decken sich nach § 16 d je zwei entsprechende Dreiecke und somit die Figuren selbst.

$\alpha$ ) Man wende die eine Figur um, so dass nunmehr je zwei entsprechende Dreiecke gleichen Sinnes sind und beweise die Congruenz nach a). Dass die Figuren in der gegebenen Lage entgegengesetzten Sinnes waren, folgt aus § 45  $\gamma$ .



**Einaxig symmetrische Figuren.**

§ 47\*.

a) Einaxig symmetrische Figuren (§ 45, Anmerkung) sind congruent und von entgegengesetztem Sinne.

Beweis. Der Abstand je zweier entsprechender Punkte solcher Figuren wird durch die Symmetrieaxe senkrecht halbiert (§ 23, Anmerkung). Wenn man also die eine Figur um die Axe dreht, bis sie wieder in die Ebene fällt, so decken sich je zwei entsprechende Punkte, womit der Beweis geliefert ist.

Für einaxig symmetrische Figuren gelten folgende Sätze.

b) Entsprechende Strecken sind einander gleich (§ 47 a).  $\beta$ ) Entsprechende Winkel sind einander gleich (§ 47 a).

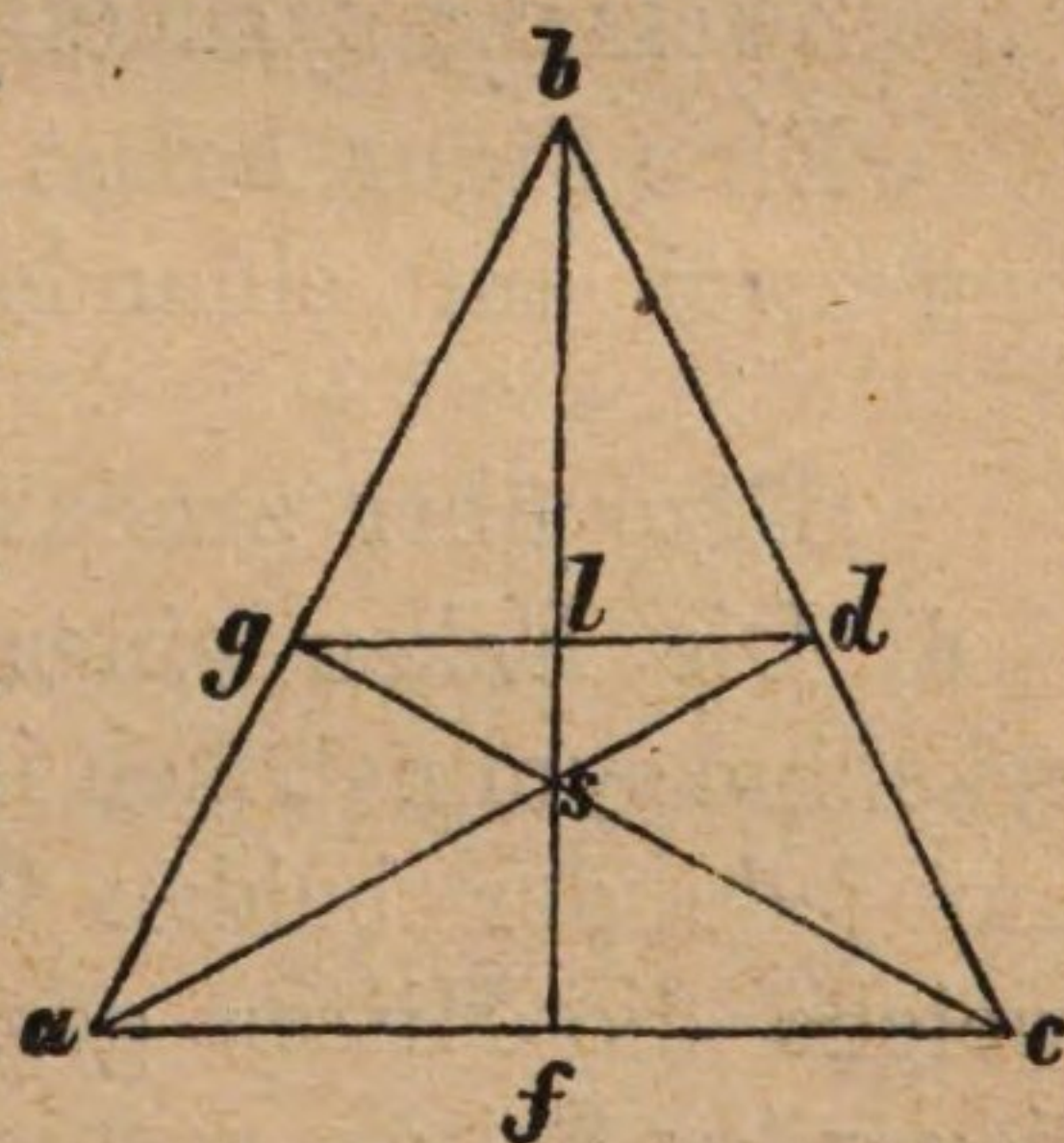
c) Der Abstand entsprechender Punkte wird von der Axe senkrecht halbiert (Definition).  $\gamma$ ) Entsprechende Geraden schneiden sich auf der Axe und ihr Winkel wird durch dieselbe halbiert.

d) Zwei Paare entsprechender Punkte bilden ein Trapez, in welchem die nichtparallelen Seiten und die Diagonalen sich auf der Axe schneiden.  $\delta$ ) Zwei Paare entsprechender Geraden bilden ein Deltoïd, dessen eine Diagonale durch die Axe dargestellt ist.

Beweise (Fig. 61).  $\gamma$ ) Wenn  $a$  und  $c$ ,  $g$  und  $d$  zwei Paare entsprechender Punkte sind, so sind  $ag$  und  $cd$  zwei entsprechende Gerade. Die Geraden  $ag$  und  $cd$  bilden mit  $ac$  ein Dreieck, welches an der Grundlinie  $ac$  zwei gleiche Winkel hat (§ 47  $\beta$ ). Das Dreieck ist also nach § 18  $\beta$  gleichschenkelig und seine Spitze  $b$  liegt auf der Mittelsenkrechten von  $ac$  (der Axe), welche zugleich den Winkel bei  $b$  halbiert (§ 18 d), was zu beweisen war.

d) Nur der Beweis der Behauptung, dass die Diagonalen  $ad$  und  $gc$  sich auf der Axe schneiden, bedarf einer Andeutung. Man beweise zunächst nach § 17 a die Congruenz der Dreiecke  $adc$  und  $agc$  (§ 47 b und  $\beta$ ). Hieraus folgt die Gleichheit der Winkel  $dac$  und  $gca$ . Der Rest des Beweises ist wie bei  $\gamma$ ).

Fig. 61.



**Centrisch symmetrische Figuren.**

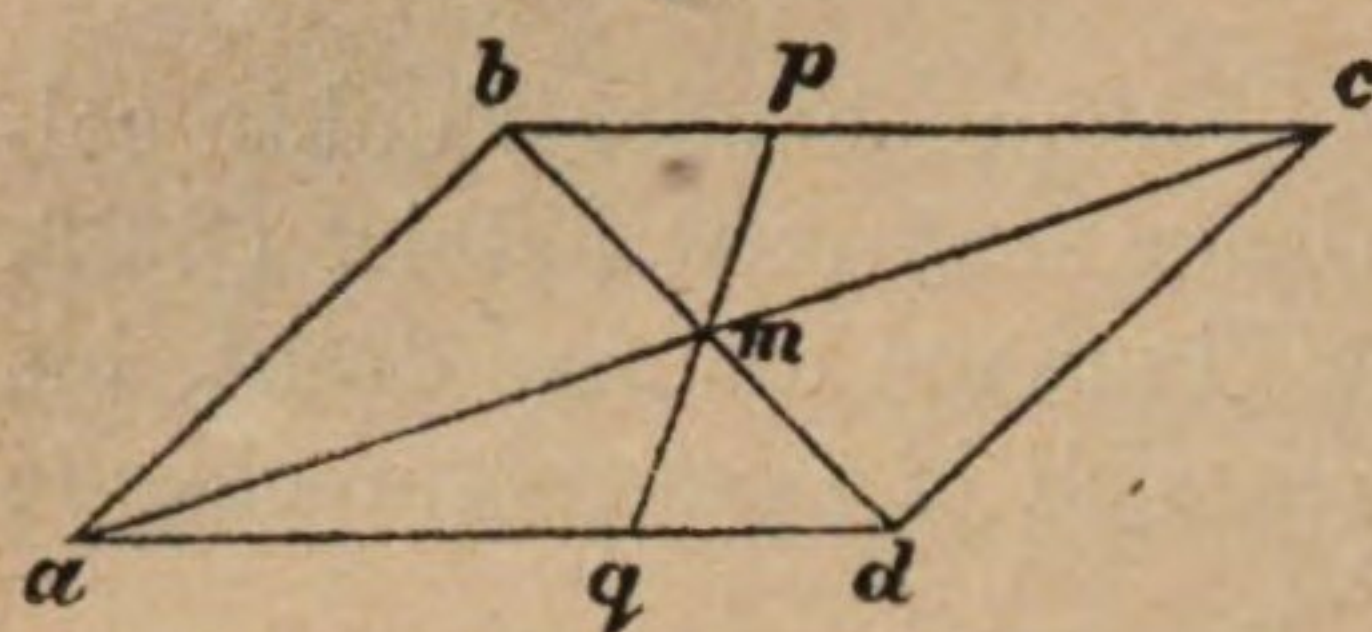
§ 48\*.

a) Centrisch symmetrische Figuren (§ 45, Anmerkung) sind congruent und von gleichem Sinne.



Beweis (Fig. 62). Wenn  $a$  und  $c$ ,  $b$  und  $d$  zwei Paare entsprechender Punkte sind (§ 25, Erklärung), so ist  $abcd$  nach § 25  $\delta$  ein Parallelogramm und die

Fig. 62.



Dreiecke  $abc$  und  $adc$  sind congruent und von gleichem Sinne. Die von einem beliebigen Paare entsprechender Punkte gebildete Strecke bildet demnach mit jedem andern Paare entsprechender Punkte congruente Dreiecke gleichen Sinnes (§ 25 a) und die Behauptung folgt aus § 46 a.

Für centrisch symmetrische Figuren gelten folgende Sätze:

b) Je zwei entsprechende Strecken sind gleich und parallel.

c) Der Abstand entsprechender Punkte wird durch das Centrum halbiert (Definition).

d) Zwei Paare entsprechender Punkte bilden ein Parallelogramm.

$\beta$ ) Je zwei entsprechende Winkel sind gleich und von gleichem Sinne.

$\gamma$ ) Zwei entsprechende Gerade sind von dem Centrum gleichweit entfernt.

$\delta$ ) Zwei Paare entsprechender Geraden bilden ein Parallelogramm.

#### § 49\*. Zweiaxig symmetrische Figuren.

Eine Figur heisst zweiaxig symmetrisch, wenn in derselben zwei auf einander senkrechte Symmetrieachsen existiren.

Sätze über zweiaxig symmetrische Figuren.

a) Die Ecken eines Rechtecks sind symmetrisch in Bezug auf jede der beiden Geraden, welche die Mitten gegenüberliegender Seiten verbinden.

b) In einer zweiaxig symmetrischen Figur sind jedem Punkte drei andere zugeordnet, welche mit ihm zusammen ein Rechteck bilden.

$\alpha$ ) Die Seiten eines Rhombus sind symmetrisch in Bezug auf jede der Diagonalen.

$\beta$ ) In einer zweiaxig symmetrischen Figur sind jeder Geraden drei andere zugeordnet, welche mit ihr zusammen einen Rhombus bilden.



# Uebungen.

## § 50\*.

1) Zwei Vielecke sind congruent, wenn sie alle Seiten bis auf eine und die eingeschlossenen Winkel entsprechend gleich haben. (Der Beweis wird durch Aufeinanderlegen geführt.)

2) Ein Viereck zu zeichnen, wenn seine Diagonalen und drei auf einander folgende Seiten gegeben sind.

3) Zwei Vielecke sind congruent, wenn sie drei auf einander folgende Seiten und die aus den Scheiteln der eingeschlossenen Winkel gezogenen Diagonalen entsprechend gleich haben.

4) Warum bezeichnet man das Trapez als ein einaxiges Viereck und das Deltoid als ein einaxiges Vierseit? (§ 47 d und  $\delta$ , § 42 a und  $\alpha$ )

5) Das Rechteck wird ein zweiaxiges Viereck genannt. Es ist bestimmt durch das Axensystem und einen Eckpunkt.

6) Der Rhombus wird ein zweiaxiges Vierseit genannt. Er ist bestimmt durch das Axensystem und eine Seitenrichtung.

Die folgenden Constructionen sind mit dem Lineal allein auszuführen.

7) Wenn die Axe  $fb$  (Fig. 61) und ein Paar entsprechender Punkte  $a, c$  gegeben ist, so soll man zu jedem Punkte  $d$  den entsprechenden finden.

Andeutung. Ziehe  $dc$  und  $da$ , wodurch  $b$  und  $s$  erhalten werden. — Ziehe  $cs$  und  $ba$ , welche sich in dem gesuchten Punkte schneiden.

8) Ein Rechteck mit seinen Axen ist gegeben. Man soll um dasselbe einen Rhombus beschreiben, von dem eine Seitenrichtung gegeben ist.

9) Man soll in einen Rhombus ein Rechteck zeichnen, von dem ein Eckpunkt gegeben ist (7).

10) In das Axensystem eines Rechtecks zu einer beliebigen Richtung (welche durch keinen Eckpunkt geht) den zugehörigen Rhombus zu zeichnen (§ 49  $\beta$ , § 50, Aufgabe 7).

11) In das Axensystem eines Rhombus oder eines Rechtecks zu einem beliebigen Punkte das zugehörige Rechteck zu zeichnen (§ 49 b, § 50, Aufgabe 7).

12) In das Axensystem eines Rhombus soll man zeichnen:

$\alpha$ ) Ein zweiaxiges Achtseit, welches durch zwei Seitenrichtungen in demselben Quadranten bestimmt ist (§ 49  $\beta$ ).

$\beta$ ) Ein zweiaxiges Achteck, welches durch zwei Ecken in demselben Quadranten bestimmt ist (§ 49 b).

13)  $\alpha$ ) Ein zweiaxiges Sechseit zu zeichnen. (Man ziehe eine Seite senkrecht auf einer Axe und eine zweite beliebig.)

$\beta$ ) Ein zweiaxiges Sechseck zu zeichnen. (Man nehme einen Eckpunkt auf einer Axe an.)

14) Ein regelmässiges  $n$ -Eck von ungerader Seitenzahl ist einaxig symmetrisch in Bezug auf  $n$  Axen. Dasselbe ist bestimmt durch diese Axen, welche einen regelmässigen  $n$ -Strahl bilden, und einen Eckpunkt.

15) Das regelmässige  $n$ -Eck von gerader Seitenzahl ist zweiaxig symmetrisch in Bezug auf  $\frac{n}{2}$  Axensysteme. Dasselbe ist zugleich centrisch symmetrisch.



## Dritter Cursus.

### Von den Flächen geradliniger Figuren.

#### I. Abschnitt.

#### Gleichheit geradliniger Figuren.

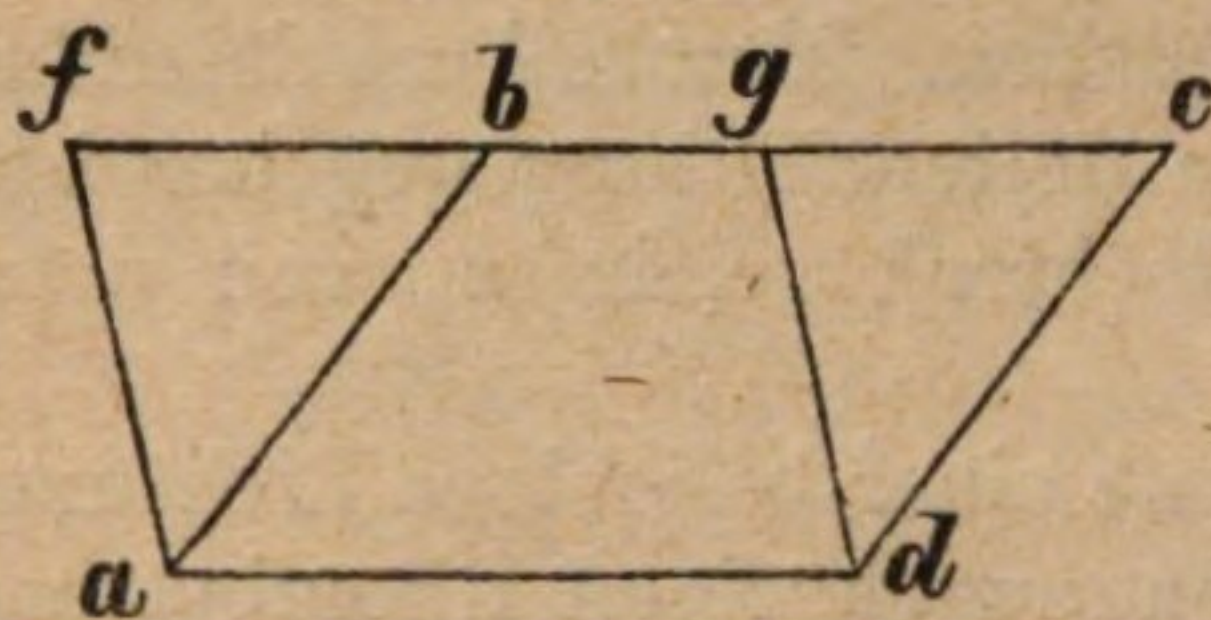
#### § 51. Gleichheit von Parallelogrammen oder Dreiecken.

**Erklärung.** In einem Parallelogramme kann man jede Seite als Grundlinie betrachten. Die zugehörige Höhe ist alsdann die Entfernung der Grundlinie von der gegenüberliegenden Seite, welche auch die obere Grundlinie genannt wird.

a) Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe haben gleiche Fläche.

$\alpha$ ) Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe haben gleiche Fläche.

Fig. 63.



**Beweise.** a) Wenn man die gleichen Grundlinien der Parallelogramme auf einander legt, so fallen die gegenüberliegenden Seiten in eine und dieselbe zu der Grundlinie parallele Gerade, wie dies in Fig. 63 dargestellt ist. Zieht man nun von der ganzen Figur  $afcd$  nach einander die beiden nach § 17 a congruenten Dreiecke  $fab$  und  $gdc$  ab, so bleiben bezüglich die Parallelogramme  $abcd$  und  $afgd$  übrig, welche nach § 4, IV einander gleich sein müssen.

$\alpha$ ) Wenn zwei Dreiecke gleiche Grundlinie und Höhe haben, so kann man sie nach § 25  $\alpha$  zu Parallelogrammen ergänzen, welche ebenfalls gleiche Grundlinie und Höhe haben. Jene Dreiecke haben daher gleiche Fläche, weil sie Hälften dieser Parallelogramme sind (§ 25  $\alpha$ ).

b) Von jedem der Sätze a) und  $\alpha$ ) lassen sich zwei Umkehrungen bilden.

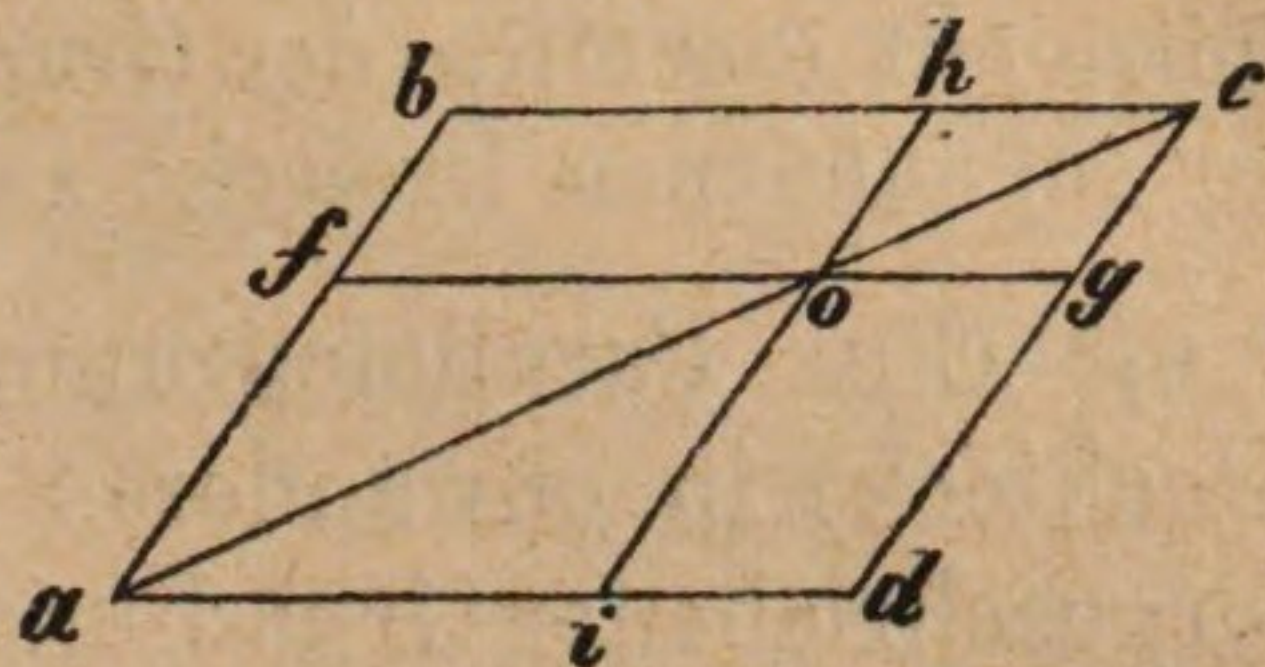
c) Alle gleichen Parallelogramme über derselben Grundlinie liegen zwischen zwei Parallelen (§ 51 b und § 25  $\gamma$ ).

$\gamma$ ) Die Spitzen aller gleichen Dreiecke über derselben Grundlinie liegen auf einer mit der Grundlinie parallelen Geraden (§ 51 b und § 25  $\gamma$ ).]



d) Wenn man durch einen Punkt in der Diagonale eines Parallelogrammes Parallelen mit den Seiten zieht, so sind die beiden Parallelogramme einander gleich, durch welche die Diagonale nicht geht.

Fig. 64.



Beweis. Aus  $abc = adc$ ,  $afo = aio$ ,  $ohc = ogc$  (§ 25 a) folgt durch Subtraction  $fbho = iogd$ .

### Aufgaben über Theilung und Verwandlung von Figuren. § 52.

a) Ein Parallelogramm in  $n$  gleiche Theile zu theilen.     $\alpha$ ) Ein Dreieck in  $n$  gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. a) Man theile die Grundlinie des Parallelogrammes in  $n$  gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit den anliegenden Seiten.  $\alpha$ ) Man theile die Grundlinie des Dreiecks in  $n$  gleiche Theile und verbinde die Theilpunkte mit dem gegenüberliegenden Eck.

b) Ein Parallelogramm in zwei Theile zu theilen, die sich wie die Zahlen  $m$  und  $n$  verhalten.     $\beta$ ) Ein Dreieck in zwei Theile zu theilen, die sich wie die Zahlen  $m$  und  $n$  verhalten.

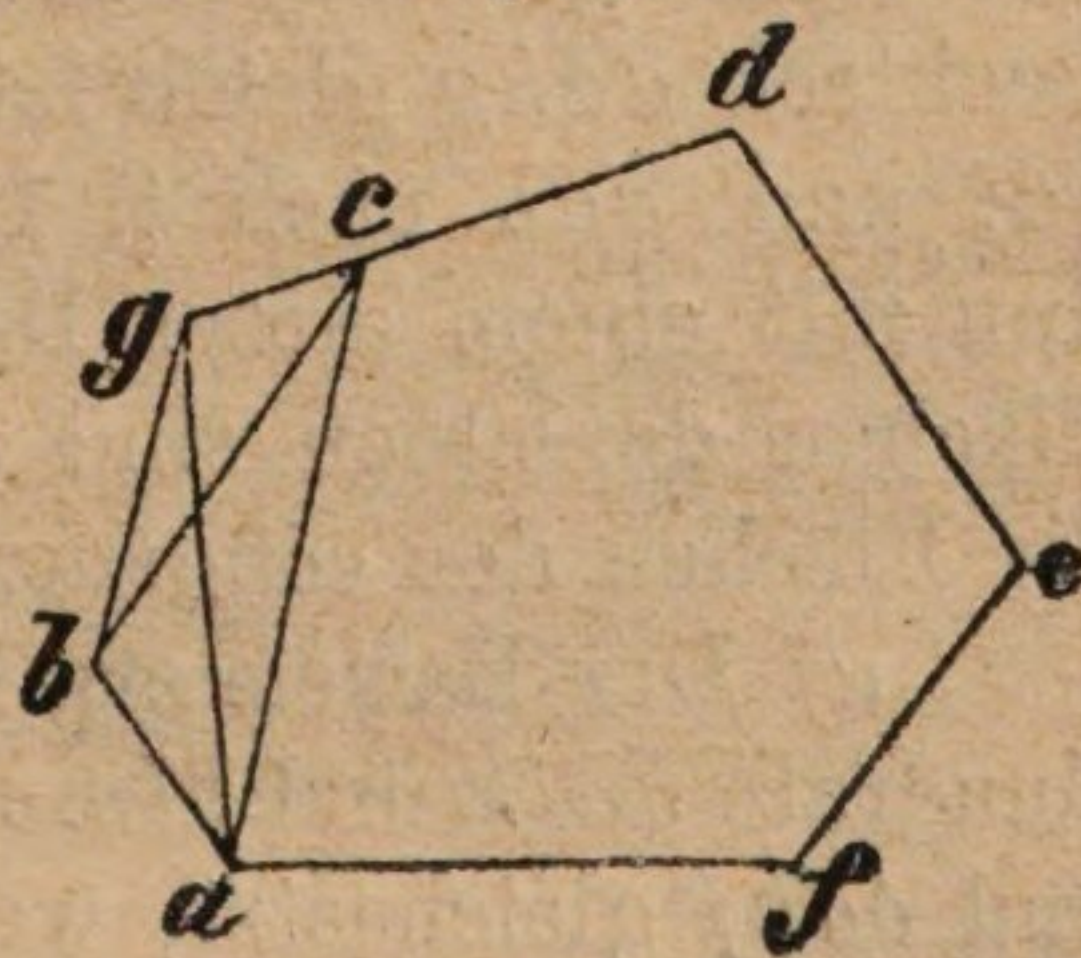
Auflösung. b) Man theile die Grundlinie des Parallelogrammes in  $m + n$  gleiche Theile und ziehe durch den  $m$ ten Theilpunkt eine Parallele mit den anliegenden Seiten.  $\beta$ ) Man theile die Grundlinie des Dreiecks in  $m + n$  gleiche Theile und verbinde den  $n$ ten Theilpunkt mit dem gegenüberliegenden Eck.

c) Ein Parallelogramm in ein anderes von gegebenem Winkel oder in ein Rechteck zu verwandeln, ohne die Grundlinie zu ändern (§ 51 c).     $\gamma$ ) Ein Dreieck in ein anderes von gegebenem Winkel oder in ein rechtwinkliges zu verwandeln, ohne die Grundlinie zu ändern (§ 51  $\gamma$ ).

d) Ein Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.     $\delta$ ) Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung. d) Schneide durch eine Diagonale  $ac$  (Fig. 65) ein Dreieck  $abc$  von dem gegebenen Vieleck ab. Wenn die Verlängerung der Seite  $dc$  und eine durch  $b$  mit  $ac$  gezogene Parallele sich in  $g$  schneiden, so ist die Fläche des Dreiecks  $abc$  derjenigen des Dreiecks  $agc$  gleich. Das Vieleck  $abcdef$  ist also in ein anderes  $agdef$  ver-

Fig- 65.





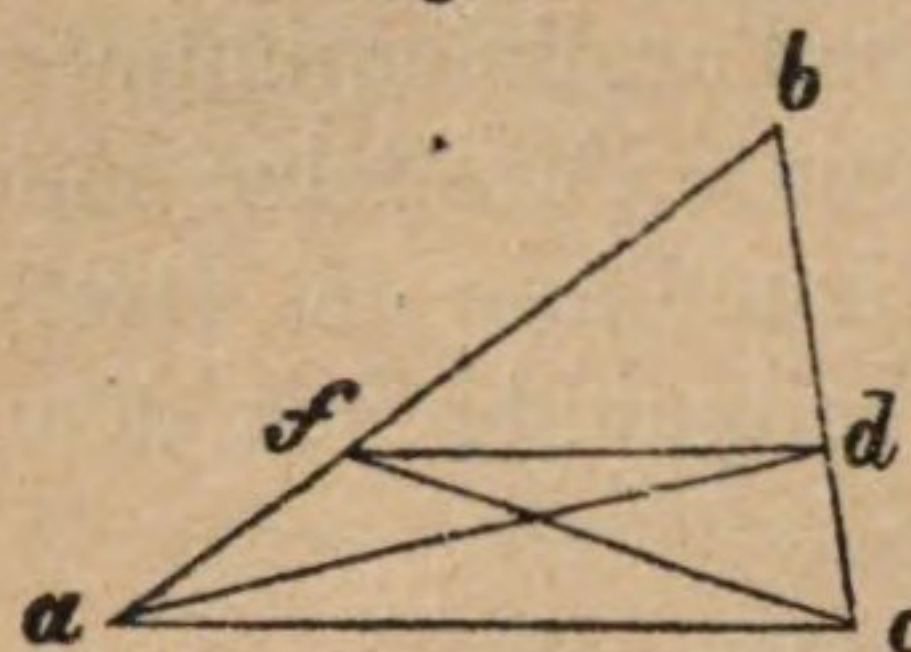
wandelt, welches die gleiche Fläche besitzt und eine Seite weniger hat. Man wiederhole dieses Verfahren.

δ) Man halbire das Dreieck durch eine Gerade, welche die Spitze mit der Mitte der Grundlinie verbindet und ergänze das eine der entstandenen Dreiecke zu einem Parallelogramme.

|                                                                                                         |                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| e) Ein Parallelogramm<br>(Rechteck) in ein anderes mit<br>vorgeschriebener Grundlinie zu<br>verwandeln. | ε) Ein Dreieck in ein an-<br>deres mit vorgeschriebener<br>Grundlinie zu verwandeln. |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|

Auflösung. e)  $fbho$  (Fig. 64) sei das gegebene Parallelogramm und  $hc$  die auf der Verlängerung einer Seite abgetragene neue Grundlinie. Man verlängere  $bf$  bis zum Schnittpunkt  $a$  mit der Geraden  $co$  und vollende das Parallelogramm  $bcd a$ . Dann werden die Verlängerungen von  $ho$  und  $fo$  das gesuchte Parallelogramm  $iogd$  bestimmen.

Fig. 66.



ε)  $bfc$  (Fig. 66) sei das gegebene Dreieck und  $ba$  die neue Grundlinie. Man verbinde  $a$  mit  $c$  und ziehe  $fd$  mit  $ac$  parallel, so ist  $bad$  das verlangte Dreieck.

### § 53. Der Pythagoreische Lehrsatz. — Aufgaben.

|                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe theilt, so ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck über der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt derselben. | α) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten (Pythagoreischer Lehrsatz). |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Beweise. a) Man construire über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks  $abc$  (Fig. 67) Quadrate. Das Quadrat über der Hypotenuse  $ac$  wird durch die Verlängerung der Höhe  $bd$  in zwei Rechtecke getheilt. Um zu zeigen, dass das Quadrat  $baik$  dem Rechteck  $adhg$  gleich ist, beweise man die Congruenz der Dreiecke  $cai$  und  $gab$  nach § 17 a. Jedes der genannten Vierecke hat nun mit einem dieser Dreiecke gleiche Grundlinie und Höhe. Die Flächen derselben sind also gleich, nämlich doppelt so gross als die Flächen der congruenten Dreiecke.

α) Der Beweis ergibt sich aus a), indem man die Summe der Quadrate  $baik$  und  $blmc$  in Fig. 67 der Summe der Rechtecke  $adhg$  und  $cdhf$  gleichsetzt, welche zusammen das Quadrat  $acfg$  bilden.



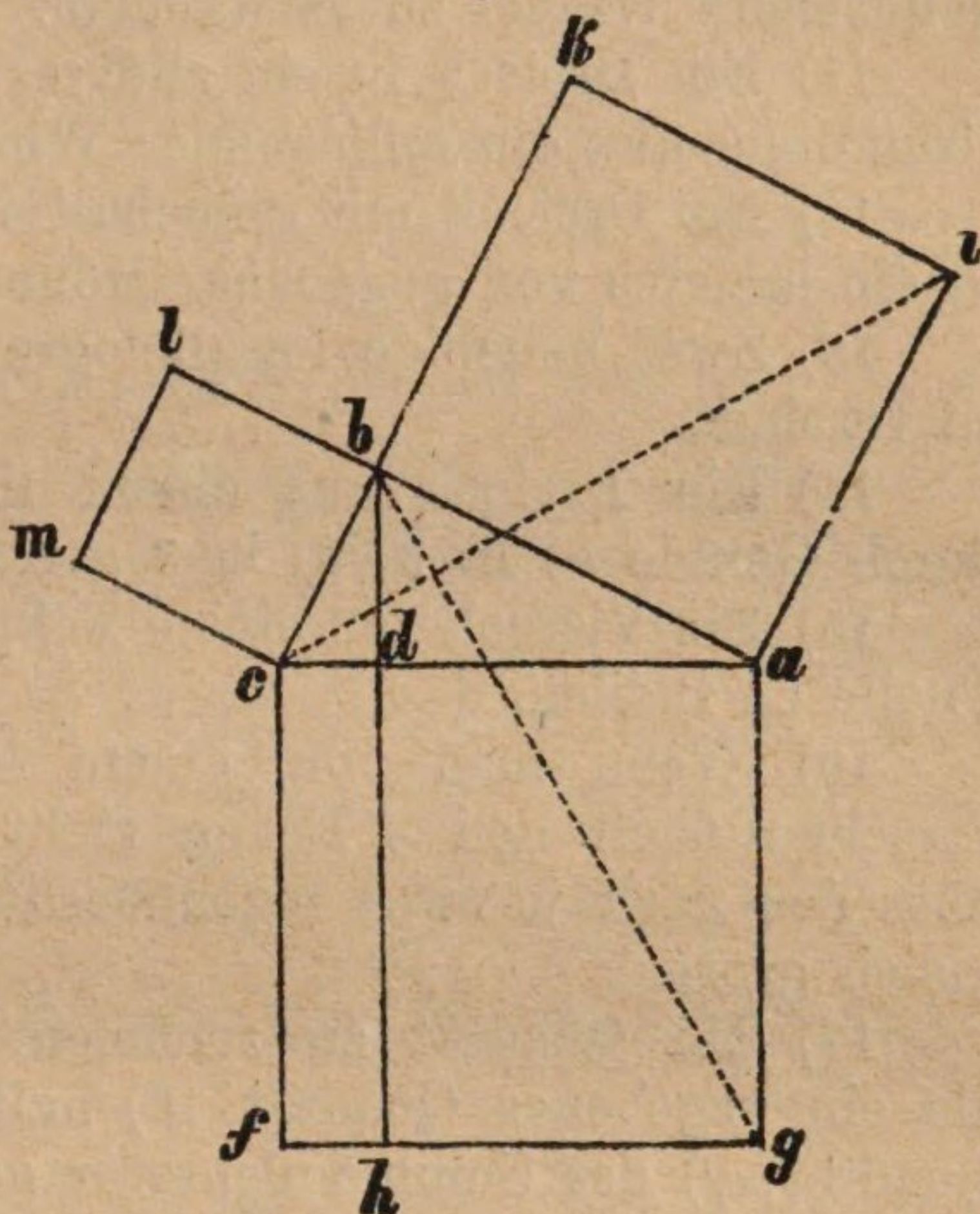
b) Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich der Differenz der Quadrate über der Hypotenuse und der andern Kathete.

c) Aufgabe. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

γ) Aufgabe. Ein Quadrat zu construiren, welches die Summe (Differenz) zweier gegebenen Quadrate ist.

Auflösung. c) (Fig. 67)  $adhg$  sei das gegebene Rechteck. Man verlängere die kürzere Seite  $ad$  bis sie  $ag$  gleich wird ( $ac = ag$ ), und beschreibe über  $ac$  als Durchmesser einen Halbkreis. Die Verlängerung der Seite  $dh$  schneidet denselben in einem Punkte  $b$  und  $ab$  ist die Seite des gesuchten Quadrats.

Fig. 67.



γ) Wenn das gesuchte Quadrat die Summe der gegebenen sein soll, so construire man ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Seiten der gegebenen Quadrate Katheten sind. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist die Seite des gesuchten Quadrats. Soll das gesuchte Quadrat die Differenz der gegebenen sein, so ist die Seite desselben Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem die Hypotenuse und die andere Kathete den Seiten der gegebenen Quadrate gleich sind.

### Uebungen.

§ 54.

1) Ein Trapez wird halbirt durch jede Gerade, welche durch den Halbirungspunkt der Mittellinie geht und die beiden parallelen Seiten (Grundlinien) schneidet.

2) Ist die Mittellinie eines Parallelogrammes oder Trapezes in  $n$  gleiche Theile getheilt und werden durch die Theilpunkte gerade Linien zwischen den Grundlinien gezogen, welche sich nicht innerhalb der Figur schneiden, so theilen sie die Figur in  $n$  gleiche Theile.

3) Ein Parallelogramm in ein Trapez zu verwandeln, dessen eine Seite verlängert durch einen gegebenen Punkt geht.

4) Ein Parallelogramm von einem Eckpunkte aus in  $n$  gleiche Theile zu theilen, α) wenn  $n$  eine gerade Zahl ist, β) wenn  $n$  eine ungerade Zahl ist.



5) Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie zwei Seiten entsprechend gleich haben und die eingeschlossenen Winkel supplementär sind.

6) Mehrere Dreiecke von gleicher Höhe zu vereinigen.

7) Die Grenze zweier Grundstücke sei eine gebrochene Linie. Man soll diese Grenze in eine geradlinige verwandeln, ohne die Flächen der Grundstücke zu ändern.

8) Ein stumpfwinkliges Dreieck mit Beibehaltung der gegenüberliegenden Seite in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

9) Ein Parallelogramm (Dreieck) in ein anderes von gegebener Seite zu verwandeln  $\alpha$ ) ohne die Grundlinie zu verändern,  $\beta$ ) ohne die Diagonale zu verändern.

10) Ein Parallelogramm in ein anderes von gegebener Seite und gegebenem Winkel zu verwandeln.

11) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, von welchem die Grundlinie und ein anliegender Winkel gegeben ist.

12) Ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels an der Grundlinie in ein anderes von gegebener Höhe zu verwandeln.

13) Zwei beliebige Parallelogramme (Dreiecke) zu einem einzigen zu vereinen.

14) Ein Dreieck aus einem in einer Seite befindlichen Punkte durch Gerade  $\alpha$ ) in 2,  $\beta$ ) in 3 gleiche Theile zu theilen.

15) Ein Viereck von einem Eckpunkte aus  $\alpha$ ) in 2,  $\beta$ ) in 3 gleiche Theile zu theilen.

16) Wenn man von einem Punkte innerhalb eines Rechtecks Strecken nach den 4 Ecken zieht, so ist die Summe der Quadrate über den nach je zwei gegenüberliegenden Ecken gezogenen Strecken gleich gross.

17) Ein Quadrat zu zeichnen, welches  $\alpha$ ) doppelt so gross ist, als ein gegebenes Quadrat,  $\beta$ ) halb so gross ist als ein gegebenes Quadrat,  $\gamma$ ) der Summe mehrerer gegebener Quadrate gleich ist.

## II. Abschnitt.

### Berechnung der Flächen geradliniger Figuren.

#### § 55. Fundamentalsatz.

Das Verhältniss zweier gleichartiger Grössen  $A$  und  $B$  ist durch den Quotient  $m:n$  zweier Zahlen  $m$  und  $n$  dargestellt, wenn eine Grösse  $C$  derselben Art existirt, welche in  $A$   $m$ mal und in  $B$   $n$ mal enthalten ist.  $C$  heisst das gemeinschaftliche Mass von  $A$  und  $B$ .\*)

---

\*) Anmerkung. Wenn kein gemeinschaftliches Mass der Grössen  $A$  und  $B$  existirt, so heissen die beiden Zahlen  $A$  und  $B$  incommensurabel. Das Verhältniss derselben ist irrational. Wenn in diesem



a) Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.       $\alpha$ ) Rechtecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

Beweis. a) Die Grundlinien  $G$  und  $G'$  der Rechtecke  $R$  und  $R'$  mögen sich verhalten, wie  $m$  zu  $n$ . Dann geht der  $n$ te Theil von  $G'$   $m$ mal in  $G$  auf. Man denke diese Theilung auf den Grundlinien ausgeführt und durch die Theilpunkte Parallelen mit den Höhen gezogen. Dadurch sind (§ 51 a) die Rechtecke in unter sich gleiche Theile getheilt, von denen  $m$  auf das Rechteck  $R$ ,  $n$  auf  $R'$  kommen. Die Rechtecke verhalten sich daher ebenfalls wie  $m : n$ .\*)

$\alpha$ ) Der Satz  $\alpha$ ) unterscheidet sich nicht von dem Satze a), weil es willkürlich ist, welche von zwei anliegenden Seiten eines Rechtecks man als Grundlinie oder Höhe ansehen will.

Erklärung. Eine Figur messen heisst zusehen, wie oft die Flächeneinheit in der gegebenen Figur enthalten ist. Die Zahl, welche dies angibt (das Verhältniss der Figur zur Fläche der Einheit), heisst die Flächenzahl oder auch kurz die Fläche der Figur. Als Flächeneinheit nimmt man ein Quadrat, dessen Seite der Längeneinheit (Meter) gleich ist. Dieselbe wird daher auch Quadrateinheit genannt.

### Berechnung der Fläche von Rechtecken, Parallelogrammen, § 56. Dreiecken etc.

a) Die Fläche eines Rechtecks ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Falle der  $n$ te Theil von  $B$  mehr als  $m$ mal aber weniger als  $m + 1$ mal in  $A$  enthalten ist, so ist das Verhältniss  $A : B$  grösser als  $m : n$  aber kleiner als  $m + 1 : n$ . Diese Grenzen, welche das Verhältniss  $A : B$  einschliessen, können einander beliebig nahe gebracht werden, wenn man  $n$  hinreichend gross nimmt.

\*) Anmerkung. Sind  $G$  und  $G'$  incommensurabel, so nehme man an, dass der  $n$ te Theil von  $G'$  mehr als  $m$ mal aber weniger als  $m + 1$ mal in  $G$  enthalten sei. Dann ist das Verhältniss der Grundlinien und desshalb auch das der Rechtecke (nach obigem Beweis) zwischen den Verhältnissen  $m : n$  und  $m + 1 : n$  eingeschlossen. Diese beiden Verhältnisse unterscheiden sich um  $\frac{1}{n}$  und können einander beliebig nahe gebracht werden, weil man  $n$  beliebig gross nehmen kann. Die Verhältnisse  $G : G'$  und  $R : R'$  können daher zwischen den nämlichen beliebig engen Grenzen eingeschlossen werden und müssen desshalb einander gleich sein.



Beweis. Der Wortlaut dieses Satzes, wie derjenige des folgenden, ist eine abgekürzte Ausdrucksweise. Dieselbe bedeutet: Wenn die Grundlinie eines Rechtecks  $g$ , die Höhe desselben  $h$  Längeneinheiten enthält, so beträgt seine Fläche  $g \cdot h$  Flächeneinheiten. Dies wird durch folgende Schlüsse gefunden: Die Flächeneinheit heisse  $E$ , ihre Grundlinie und Höhe sind gleich 1. Die Fläche des gegebenen Rechtecks sei  $F$ , seine Grundlinie ist  $g$ , seine Höhe  $h$ .

Man denke sich als Hilfsfigur ein Rechteck mit der Grundlinie  $g$  und der Höhe 1, dessen Fläche  $H$  heissen soll. Dann hat man nach § 55, a

$$H : E = g : 1.$$

Ferner nach § 55  $\alpha$   $F : H = h : 1.$

Aus diesen beiden Proportionen ergibt sich:

$$F : E = g \cdot h : 1 = g \cdot h,$$

d. h.  $g \cdot h$  ist die Elächenzahl des Rechtecks (Erklärung von § 55.).

**b)** Die Fläche ( $F$ ) eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz (dem Quadrate) einer Seite ( $s$ ). —  $F = s^2$

Anmerkung. Das Quadratmeter wird in Quadratdecimeter ( $\square^{\text{dm}}$ ), das letztere in Quadratcentimeter ( $\square^{\text{cm}}$ ) und dieses in Quadratmillimeter ( $\square^{\text{mm}}$ ) getheilt. Es sind diese Flächen Quadrate, deren Seiten der Reihe nach  $1^{\text{dm}}$ ,  $1^{\text{cm}}$ ,  $1^{\text{mm}}$  betragen. Aus b) ergibt sich, dass die Eintheilungszahl des Quadratmeters 100 ist, das heisst:

$$1 \square^{\text{m}} = 100 \square^{\text{dm}} = 10,000 \square^{\text{cm}} = 1,000,000 \square^{\text{mm}}.$$

Ferner ist:

$$1 \text{ Quadrathektometer (Hektar)} = 100 \text{ Quadratdekameter} \\ (\square^{\text{Dm}} \text{ oder Ar}) = 10,000 \square^{\text{m}}.$$

**c)** Die Fläche ( $F$ ) eines Parallelogrammes ist gleich dem Producte aus Grundlinie ( $g$ ) und Höhe ( $h$ ). —  $F = g \cdot h$ .

Beweis. Die Fläche ist gleich derjenigen eines Rechtecks, welches mit dem Parallelogramme gleiche Grundlinie und Höhe hat.

**d)** Die Fläche ( $F$ ) eines Dreiecks ist gleich der Hälfte des Productes aus Grundlinie ( $g$ ) und Höhe ( $h$ ). —  $F = \frac{g \cdot h}{2}.$

Beweis. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogrammes, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

**e)** Die Fläche ( $F$ ) eines Trapezes ist gleich dem Producte aus der Höhe ( $h$ ) und der Hälfte von der Summe der parallelen Seiten ( $s, s'$ ). —  $F = h \cdot \frac{s + s'}{2}.$



**Beweis.** Man theile das Paralleltrapez durch die Diagonale in zwei Dreiecke, berechne ihre Flächen nach d) und addire dieselben.

**f)** Die Fläche ( $F$ ) eines dem Kreise umbeschriebenen Vielecks ist gleich der Hälfte des Productes aus dem Umring ( $u$ ) des Vielecks und dem Radius ( $r$ ) des Kreises. —  $F = \frac{u \cdot r}{2}$ .

**Beweis.** Die Fläche besteht aus Dreiecken, welche je eine der Seiten  $s_1, s_2, s_3 \dots s_n$  des Vielecks zur Grundlinie und den Radius des Kreises zur Höhe haben. Man addire die Flächen dieser Dreiecke und setze  $s_1 + s_2 + s_3 \dots + s_n = u$ .

### Folgerungen.

§ 57.

**a)** Wenn die Fläche eines Rechtecks (Parallelogrammes)  $F$  Quadrateinheiten und seine Höhe  $h$  Längeneinheiten enthält, so enthält seine Grundlinie  $F:h$  Längeneinheiten (§ 56 a).

**b)** Wenn die Fläche eines Quadrates  $F$  Quadrateinheiten enthält, so enthält die Seite desselben  $\sqrt{F}$  Längeneinheiten. (§ 56 b).

### Verhältnisse von Flächen.

§ 58.

**a)** Rechtecke (Parallelogramme, Dreiecke) verhalten sich wie die Producte aus Grundlinie und Höhe (§ 56 a, c, d).

**b)** Parallelogramme (Dreiecke) von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien. Parallelogramme (Dreiecke) von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen (a).

**c)** Dreiecke (Parallelogramme), welche einen Winkel gemeinsam haben, verhalten sich wie die Producte der Seiten, welche diesen Winkel einschliessen.

**Beweis** (Fig. 68. In der Figur sind die Flächen der beiden Dreiecke gleich).  $bad$  und  $bfc$  seien die gegebenen Dreiecke.

Wenn man die Gerade  $fd$  zieht, so ergeben sich aus b) die Proportionen

$$\begin{aligned} \triangle bfc : \triangle bfd &= \overline{bc} : \overline{bd} \\ \triangle bfd : \triangle bad &= \overline{bf} : \overline{ba}. \end{aligned}$$

Aus beiden Proportionen schliesst man

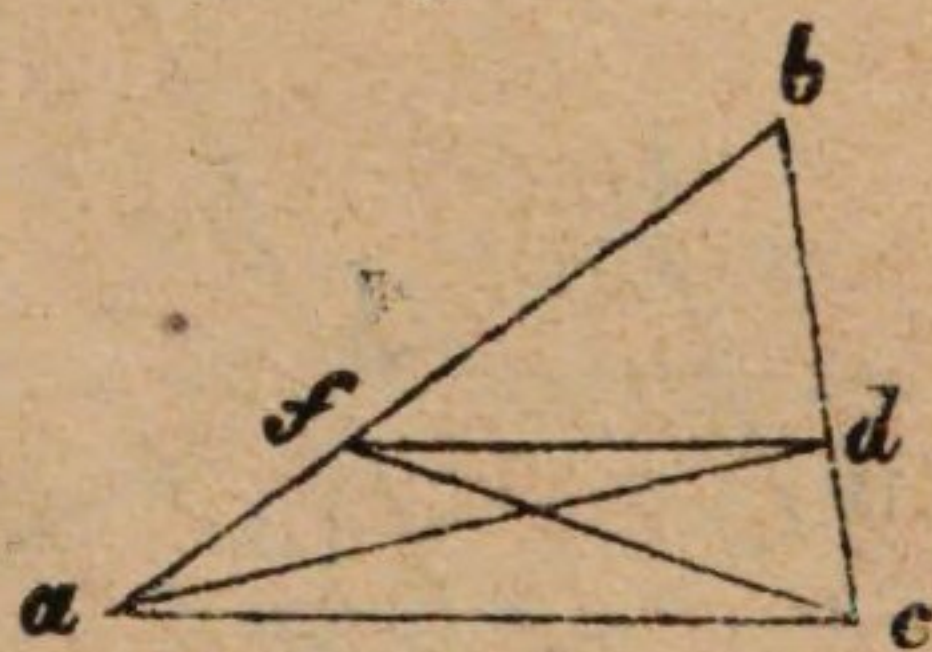
$$\triangle bfc : \triangle bad = \overline{bc} \cdot \overline{bf} : \overline{bd} \cdot \overline{ba}.$$

### Darstellung algebraischer Ausdrücke.

§ 59.

**a)** Jedes Product  $a \cdot b$  zweier Zahlen  $a$  und  $b$  kann als Fläche eines Rechtecks oder Parallelogrammes (als die Summe

Fig. 68.





zweier Dreiecke) angesehen werden, in welchen  $a$  und  $b$  die Längen von Grundlinie und Höhe bedeuten.

b) Das Quadrat einer Zahl  $a$  kann als Fläche eines Quadrates angesehen werden, dessen Seite  $a$  Längeneinheiten hat.

c) Jede Summe von Producten kann durch eine Fläche dargestellt werden, welche aus Dreiecken zusammengesetzt ist. Jedes Aggregat von Producten kann als Differenz solcher Flächen gedeutet werden.

d) Jede identische Gleichung zwischen den unter c) angeführten Ausdrücken spricht einen Satz über die Flächen zweier Figuren aus.

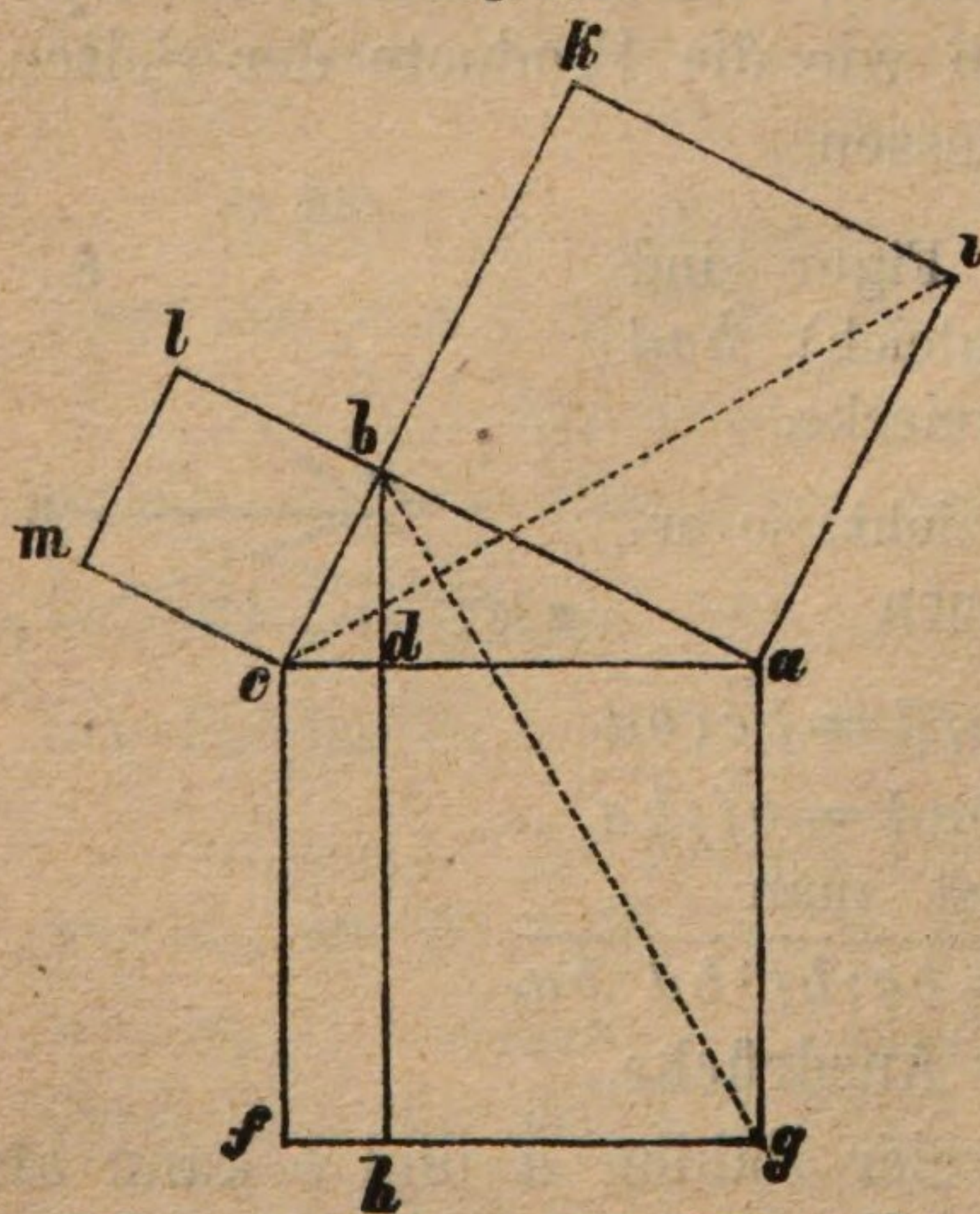
Beispiele:  $a \cdot c + b \cdot c = (a + b) c$  heisst: Die Summe zweier Rechtecke mit den Grundlinien  $a$  und  $b$  und der gemeinsamen Höhe  $c$  ist gleich einem andern Rechteck, welches  $a + b$  zur Grundlinie und  $c$  zur Höhe hat.

$(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$  heisst: Das Quadrat über der Summe (Differenz) zweier Strecken ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Strecken vermehrt (vermindert) um das doppelte Rechteck aus diesen Strecken.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  heisst: Das aus der Summe und Differenz zweier Strecken gebildete Rechteck ist gleich der Differenz der Quadrate über diesen Strecken.

e) Jede Bedingungsgleichung zwischen solchen Grössen kann als eine Constructionsaufgabe betrachtet werden.

Fig. 69.



$x^2 = a^2 - b^2$  heisst: Man soll die Seite eines Quadrates suchen, welches der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist.

$x^2 = a \cdot b$  heisst: Die Seite eines Quadrates zu suchen, welches einem gegebenen Rechteck an Fläche gleich ist.

f) Umgekehrt können geometrische Sätze in Formeln ausgedrückt werden.

Beispiele: § 53 a heisst in Zeichen (Fig. 69)  $\overline{bc^2} = \overline{ca} \cdot \overline{cd}$ ;  $\overline{ba^2} = \overline{ca} \cdot \overline{da}$ .

Der Beweis von § 53 a lautet:

$$\overline{ba^2} + \overline{bc^2} = \overline{ca} \cdot \overline{cd} + \overline{ca} \cdot \overline{da} = \overline{ca} (\overline{cd} + \overline{da}) = \overline{ca^2}$$



## Die Quadrate der Seiten schiefwinkliger Dreiecke.

§ 60.

a) Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem spitzen (stumpfen) Winkel gegenüber liegt, wird erhalten, indem man die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert (vermehrt) um das doppelte Rechteck aus der einen dieser Seiten und der Projection der andern auf dieselbe.

Beweis. Die Behauptung heisst in Zeichen:

$$\text{(Fig. 70)} \quad \overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 - 2 \overline{ac} \cdot \overline{mc}$$

$$\text{(Fig. 71)} \quad \overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 + 2 \overline{ac} \cdot \overline{mc}$$

Zum Beweise bestimme man  $\overline{ab}^2$  aus dem Dreieck  $abm$

$$\overline{ab}^2 = \overline{am}^2 + \overline{bm}^2$$

Sodann drücke man  $\overline{bm}^2$  durch die übrigen Seiten des Dreiecks  $cbm$  aus und stelle  $\overline{am}$  durch die Stücke  $\overline{ac}$  und  $\overline{mc}$  dar, um durch Anwendung von § 59 d, 2. Beispiel,  $\overline{am}^2$  zu erhalten. Die Einsetzung der Werthe für  $\overline{bm}^2$  und  $\overline{am}^2$  liefert die gesuchte Formel.

Fig. 70.

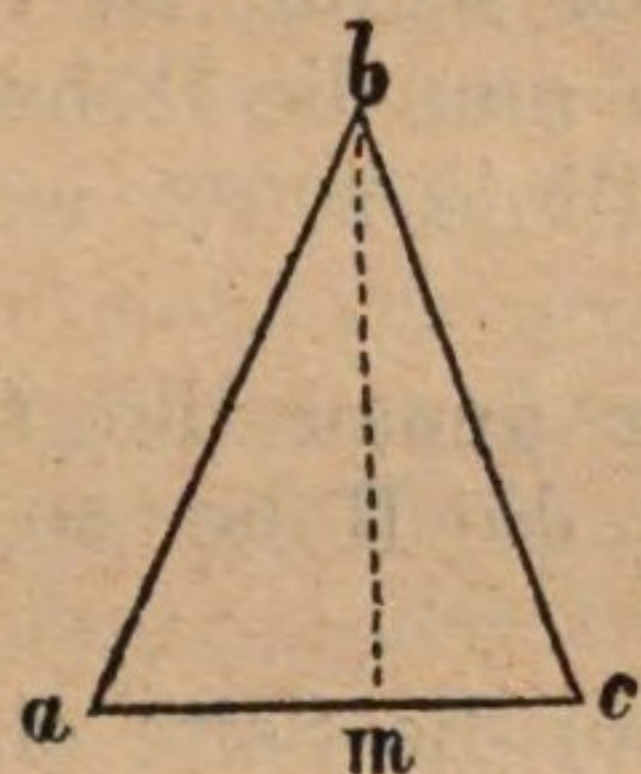
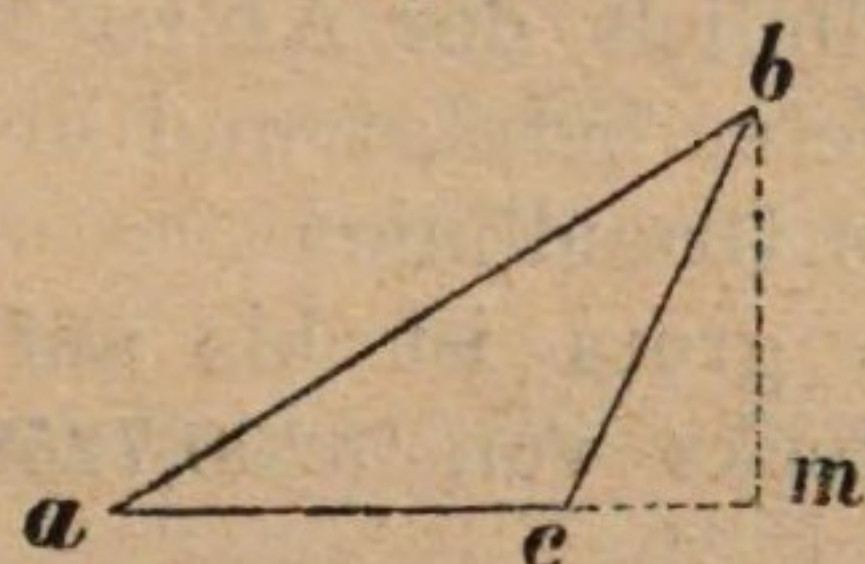


Fig. 71.



\*b) Der geometrische Ort aller Punkte ( $m$ , Fig. 70), für welche die Differenz der Quadrate ihrer Abstände von zwei festen Punkten ( $a$  und  $c$ ) eine gegebene Grösse hat, ist eine Gerade, welche auf der Verbindungslinie jener Punkte senkrecht steht.

Beweis (Fig. 70). 1) Wenn  $\overline{ba}^2 - \overline{bc}^2$  jenen gegebenen Werth hat, so findet dasselbe für jeden Punkt der Senkrechten  $bm$  statt, denn

$$\overline{ba}^2 - \overline{bc}^2 = (\overline{bm}^2 + \overline{ma}^2) - (\overline{bm}^2 + \overline{mc}^2) = \overline{ma}^2 - \overline{mc}^2$$

hängt nur von der Lage des Punktes  $m$  ab.

2) Für keinen Punkt ausserhalb der Geraden  $bm$  kann die Differenz jener Quadrate den gegebenen Werth haben. Würde nämlich ein solcher Punkt existiren, so müsste auch jeder Punkt der von ihm auf  $ac$  gefällten Senkrechten der gleichen Bedingung genügen.

Dann könnte man mit einem Halbkreis, welcher über der Geraden  $ac$  um  $a$  als Mittelpunkt mit hinreichend grossem Radius



beschrieben ist, die beiden Geraden in zwei Punkten  $x$  und  $y$  schneiden. Aus

$$\overline{xa}^2 - \overline{xc}^2 = \overline{ya}^2 - \overline{yc}^2 \text{ und } xa = ya$$

würde man

$$xc = yc$$

schliessen. Daraus würde folgen (§ 21 a, § 16 d), dass  $x$  und  $y$  und deshalb auch die beiden Senkrechten zusammenfallen, was der Annahme widerspricht.

Aus 1) und 2) ergibt sich die Behauptung.

## § 61.

### Uebungen.

1) Ein Rechteck, ein Parallelogramm und ein Trapez haben dieselbe Grundlinie von  $3,725^m$  und die gemeinsame Höhe  $1,18^m$ . Die obere Grundfläche des Trapezes beträgt  $2,123^m$ . Wie gross sind die Flächen dieser Figuren?

2) Wie gross ist bis auf ein Millimeter genau die Seite des Quadrates, welches die gleiche Fläche hat?

3) Ein Feld von der Form eines Trapezes wurde zu 7150 Mark gekauft, nämlich der Ar zu 22 Mark. Wenn nun die Höhe des Trapezes 65 Meter beträgt und die kleinere Grundlinie  $200^m$ , wie lang ist die grössere Grundlinie?

4) Wie gross ist bis auf ein Millimeter genau die Grundlinie eines Rechtecks von  $3250,725832 \square^m$ , wenn die Höhe  $50,727^m$  beträgt?

5) Wie gross ist bis auf 1 Centimeter genau die Seite eines Quadrats von  $\frac{3}{4} \square^m$ ?

6) Wie viel Rechtecke von  $62^m$  Länge und  $25^m$  Breite braucht man, um eine rechtwinklige Fläche von  $43,4^m$  Länge und  $7,5^m$  Breite zu belegen?

7) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind  $45,7^m$  und  $20,1^m$ . Wie gross ist sein Inhalt?

8) Die Grundlinie eines Dreiecks von  $667 \square^m$  Fläche ist  $58^m$ . Wie gross ist die Höhe?

9) Wenn  $a$  die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist, so beträgt die Höhe  $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$  und die Fläche  $\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ .

10) Die Seite eines Rhombus ist  $12^m$  und ein Winkel desselben ist  $60^\circ$ . Wie gross ist sein Inhalt?

11) Eine Diagonale eines Vierecks beträgt  $13^m$ , die von den nicht auf ihr liegenden Eckpunkten auf dieselbe gefällten Senkrechten sind  $7,3^m$  und  $2,5^m$ . Wie gross ist die Fläche dieses Vierecks?

12) Wenn man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit den 3 Ecken verbindet, so stehen je zwei der entstandenen Dreiecke in demselben Verhältniss, in welchem die Grundlinie des dritten Dreiecks durch die Verlängerung der gemeinsamen Seite der beiden ersten getheilt wird.



13) Ein Dreieck auf die in 12) angegebene Weise in 3 Dreiecke zu theilen, welche sich verhalten,  $\alpha$ ) wie  $1:2:3$ ,  $\beta$ ) wie  $1:2:3$ ,  $\gamma$ ) wie  $1:1:1$  (§ 28 e),  $\delta$ ) wie die Seiten des Dreiecks (§ 23 d).

14) Die Hypotenuse und die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks betragen  $35^m$  und  $12^m$ . Wie gross ist die andere Kathete?

15) Zu untersuchen, ob ein Dreieck recht-, spitz- oder stumpfwinklig ist, wenn seine Seiten betragen:  $\alpha$ ) 12, 16, 20,  $\beta$ ) 15, 10, 9,  $\gamma$ ) 12, 9, 11,  $\delta$ ) 3, 4, 5,  $\varepsilon$ ) 6, 8, 10.

16) Wenn  $a$  und  $b$  zwei Zahlen sind und  $x, y, z$  die Seiten eines Dreiecks bedeuten, so ist dieses Dreieck rechtwinklig, wenn die Gleichungen  $x^2 = a \cdot b$ ,  $y = \frac{a-b}{2}$ ,  $z = \frac{a+b}{2}$  gelten.

17) Wenn 14, 13, 15, (56, 25, 39) bezüglich die Längen der Grundlinie und der beiden andern Seiten sind, so sind die Längen der Höhe und der Abschnitte auf der Grundlinie durch ganze Zahlen dargestellt.

18) Für je zwei Seiten eines Dreiecks hat das Product der einen in die Projection der andern auf dieselbe die gleiche Grösse.

19) In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den 4 Seiten gleich der Summe der Quadrate über den Diagonalen.

20) In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate zweier Seiten doppelt so gross als die Summe der Quadrate über der Hälfte der dritten Seite und über der nach der Mitte dieser Seite gezogenen Transversalen.

21) Welches ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, für welche die Summe der Quadrate ihrer Abstände von zwei festen Punkten eine gegebene Grösse ist.

22) In jedem Viereck ist die Summe der Quadrate seiner Seiten gleich der Summe der Quadrate seiner Diagonalen, vermehrt um das vierfache Quadrat der Strecke, welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet.

## Vierter Cursus.

### Von der Proportionalität der Linien.

#### I. Abschnitt.

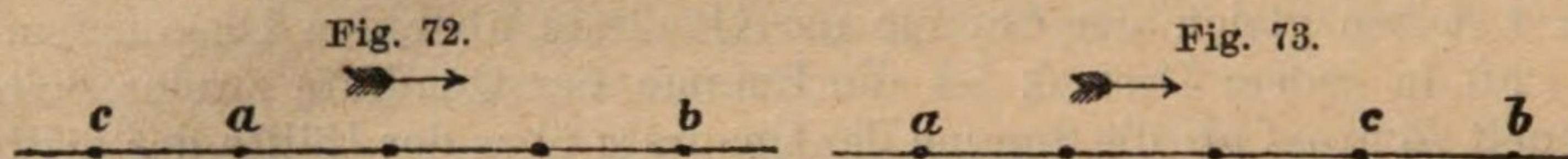
##### Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen.

##### Bezeichnung der Länge und Richtung von Strecken. § 62.\*

Um für Strecken auf derselben Geraden oder auf parallelen Geraden die Beziehung zwischen ihren Längen und diejenige zwischen ihren Richtungen durch dasselbe Zeichen auszudrücken, verfährt man folgendermassen.



- Die zwei entgegengesetzten Richtungen einer Geraden werden als positive und negative Richtung unterschieden. Es ist der Wahl überlassen, welche Richtung man als die positive ansehen will, nur müssen, wenn parallele Geraden in der Figur vorhanden sind, die positiven Richtungen derselben übereinstimmen. Die Längenzahl einer Strecke erhält nun das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Richtung von ihrem Anfangspunkte nach dem Endpunkte mit der positiven oder negativen Richtung der Geraden übereinstimmt und die so definirte algebraische Grösse wird bezeichnet, indem man den Buchstaben des Endpunktes hinter denjenigen des Anfangspunktes schreibt und dieses Symbol mit einer Klammer umgibt. Wenn in Fig. 72 der Pfeil die positive Richtung bezeichnet und  $ca$  als Längeneinheit angesehen wird, so ist  $(ca) = +1$ ,  $(ab) = +3$ ,  $(ba) = -3$ ,  $(ab) = -(ba)$ .



Der Quotient (das Verhältniss) und das Product zweier Strecken werden nach den Regeln der Algebra gebildet, so dass dieselben positiv oder negativ werden, je nachdem die beiden Strecken gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. So ist zum Beispiel das Verhältniss  $(ca):(cb)$ , welches das Abstandsverhältniss des Punktes  $c$  von den Punkten  $a$  und  $b$  heisst, positiv in Fig. 72  $[(ca):(cb) = +(1:4)]$  und negativ in Fig. 73  $[(ca):(cb) = -(3:1)]$ .

Nimmt man jedoch auf die Richtung der Strecken keine Rücksicht, so bezeichnet man die Strecken durch die Buchstaben der beiden Endpunkte in beliebiger Ordnung und ohne Klammer. Diejenigen Zahlen, welche die Länge von Strecken, ihr Verhältniss oder Product ausdrücken, erhalten kein Vorzeichen, sondern sind als absolute Zahlen zu betrachten.

### § 63. Durchschnitt eines Winkels mit Parallelen.

- |                                                                                                                                                  |                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) Wenn zwei convergente Gerade von parallelen Linien geschnitten werden, so verhalten sich die Abschnitte der einen Geraden wie die ent-</p> | <p>α) Wenn man auf zwei convergenten Geraden von dem Schnittpunkte aus proportionale Stücke abschneidet und die Endpunkte entsprechen-</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

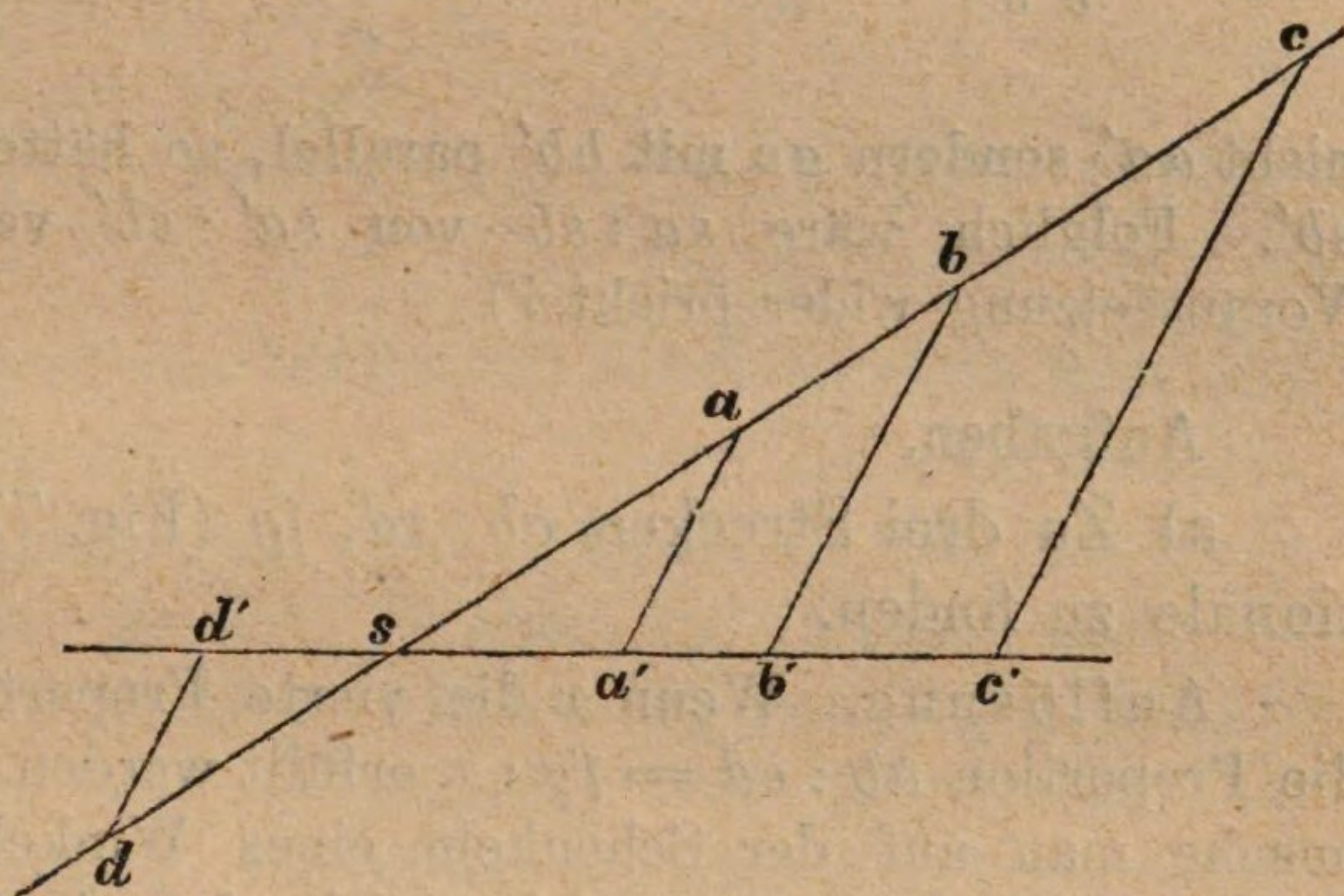


sprechenden Abschnitte der andern. Die Parallelen verhalten sich der Reihe nach wie die Abstände ihrer Endpunkte (auf einer Geraden) von dem Schnittpunkte der Geraden.

der Stücke verbindet, so sind die Verbindungslinien parallel.

Beweis. a) Unter der Voraussetzung, dass  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  ... (Fig. 74) parallel sind, soll z.B. bewiesen werden, dass  $ab:bc = a'b':b'c'$ . Man nehme an, dass  $ab$  und  $bc$  sich wie die Zahlen  $m$  und  $n$  verhalten. Dann geht der  $n^{\text{te}}$  Theil von  $bc$   $m$ mal in  $ab$  auf. Man denke diese Theilung auf  $ab$  und  $bc$  ausgeführt und

Fig. 74.



durch die erhaltenen Theilpunkte Parallelen zu  $aa'$  gezogen. Dieselben werden nach § 28 b auf der andern Geraden auch unter sich gleiche Stücke abtheilen. Von demselben kommen  $m$  auf  $a'b'$  und  $n$  auf  $b'c'$ , woraus sich ergibt, dass auch  $a'b'$  und  $b'c'$  sich wie die Zahlen  $m$  und  $n$  verhalten. Hieraus folgt  $ab:bc = a'b':b'c'$ .\*)\*\*) Ebenso werden andere Proportionen der Art bewiesen, wie z. B.  $sa:sb = sa':sb'$ . Was die zweite Behauptung anbelangt, so soll unter der Voraussetzung, dass  $aa'$  und  $bb'$  in Fig. 76 parallel sind, die Proportion  $a'a:b'b = sa:sb$  bewie-

\*) Vollständiger:  $(ab):(bc) = (a'b'):(b'c')$ . — § 62.

\*\*) Anmerkung. Wenn  $ab$  und  $bc$  incommensurabel sind, so nehme man an, dass der  $n^{\text{te}}$  Theil von  $bc$  mehr als  $m$  aber weniger als  $m+1$  mal in  $ab$  aufgehe. Das Verhältniss  $ab:bc$ , und desshalb auch (nach dem obigen Beweise)  $a'b':b'c'$ , ist also zwischen den Verhältnissen  $\frac{m}{n}$  und  $\frac{m+1}{n}$  eingeschlossen. Diese beiden Verhältnisse unterscheiden sich um  $\frac{1}{n}$  und können einander beliebig nahe gebracht werden, weil man  $n$  beliebig gross nehmen kann. Die Verhältnisse  $ab:bc$  und  $a'b':b'c'$  können deshalb zwischen die nämlichen beliebig engen Grenzen eingeschlossen werden und müssen somit gleich sein.



wiesen werden. Man bringe das Dreieck  $sbb'$  in die Lage  $\sigma a\beta$ , so dass  $sb = \sigma a$  und  $b'b = \beta a$ , und beweise den Parallelismus von  $sb'$  und  $\sigma\beta$  (§ 9 b). Dann folgt aus dem Vorigen die Proportion  $a'a : \beta a = sa : \sigma a$  und durch Einsetzen  $a'a : b'b = sa : sb$ .\*)\*\*) (Fig. 75)

$\alpha$ ) Wenn die Proportion  $sa : sb = sa' : sb'$ \*\*\*) (Fig. 76) erfüllt ist, so sind die Geraden  $aa'$  und  $bb'$  parallel. Wäre nämlich

Fig. 75.

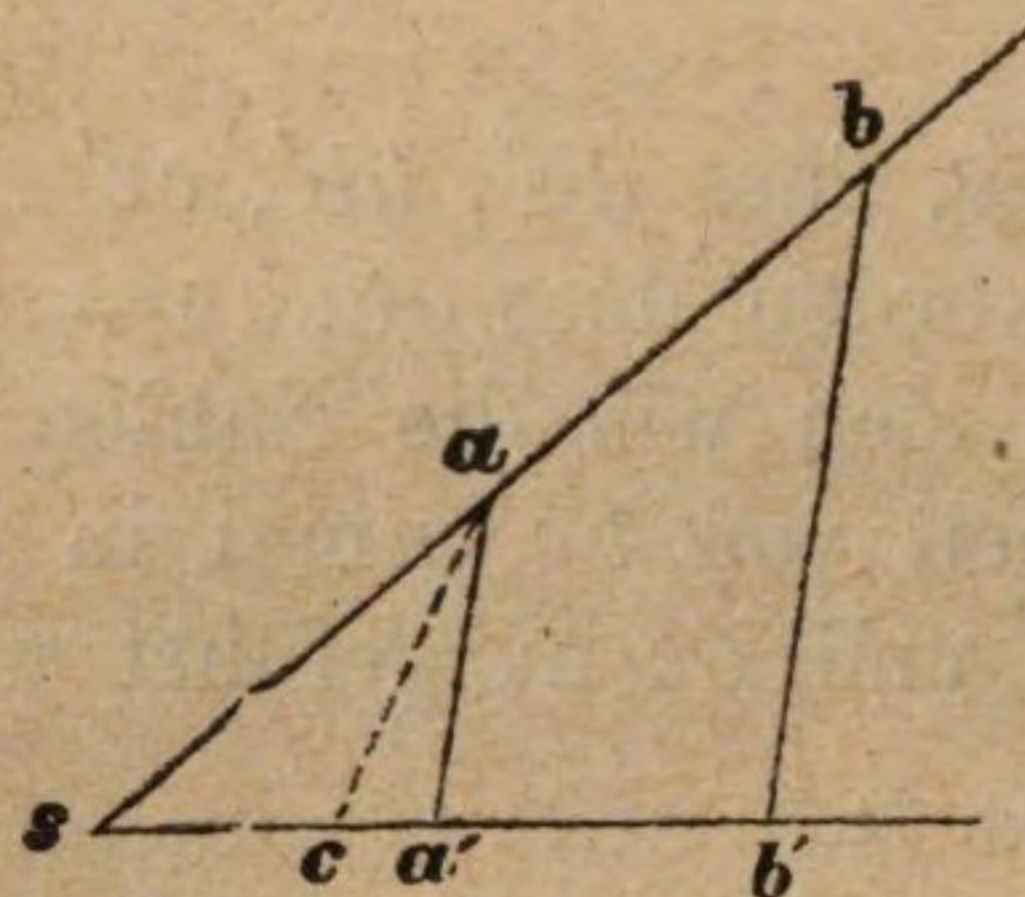
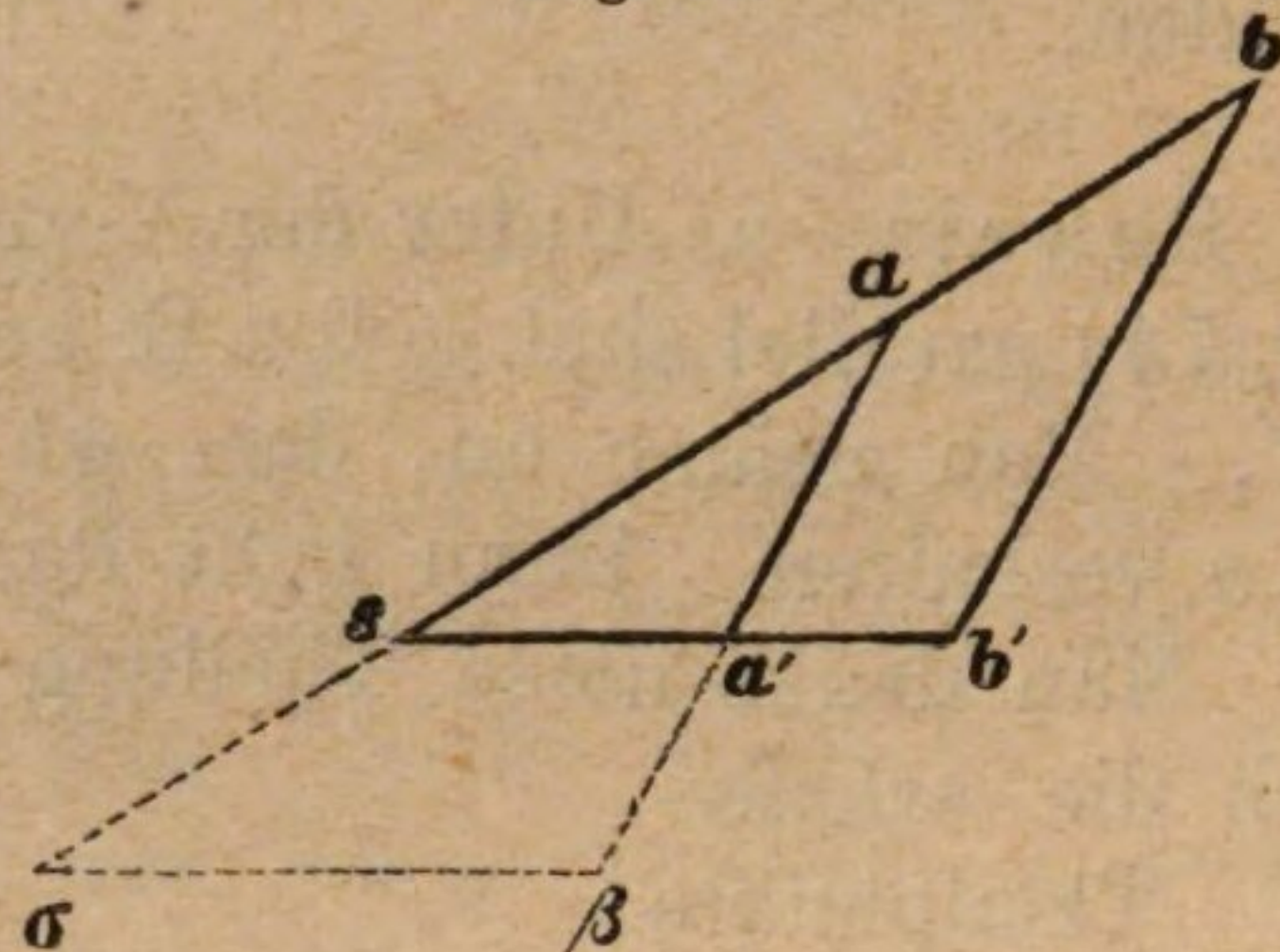


Fig. 76.



nicht  $aa'$  sondern  $ac$  mit  $bb'$  parallel, so hätte man  $sa : sb = sc : sb'$ . Folglich wäre  $sa : sb$  von  $sa' : sb'$  verschieden, was der Voraussetzung widerspricht.†)

#### § 64. Aufgaben.

a) Zu drei Strecken  $ab$ ,  $cd$ ,  $fg$  (Fig. 77) die 4te Proportionale zu finden.

Auflösung. Wenn  $x$  die vierte Proportionale ist, so muss die Proportion  $ab : cd = fg : x$  erfüllt werden. Zu diesem Zwecke mache man auf der Schenkeln eines Winkels die Strecken  $mn$ ,  $np$ ,  $mq$  (Fig. 78) bezüglich gleich  $ab$ ,  $cd$ ,  $fg$ , ziehe  $pr$  mit  $nq$  parallel, so ist  $qr$  die vierte Proportionale  $x$ . (Beweis nach § 63 a.)

\*) Vollständiger:  $(a'a) : (b'b) = (sa) : (sb)$ . — § 62.

\*\*) Anmerkung. Wenn die Parallelen auf verschiedenen Seiten des Scheitels  $s$  liegen, wie  $aa'$  und  $dd'$  in Fig. 74, so muss man das Dreieck  $sdd'$  um  $180^\circ$  gedreht denken, um diesen Fall auf den vorhergehenden zurückzuführen.

\*\*\*) Vollständiger:  $(sa) : (sb) = (sa') : (sb')$ . — § 62.

†) Anmerkung. Zwei Punktreihen (§ 2  $\alpha$ ) heissen ähnlich, wenn ihre Punkte sich paarweise so entsprechen, dass zwei Strecken der einen Reihe sich verhalten, wie die entsprechenden Strecken der andern.

Die Sätze a) und  $\alpha$ ) kann man daher auch so aussprechen:

a) Zwei convergente Gerade werden von parallelen Linien in ähnlichen Punktreihen geschnitten. Der Schnittpunkt der Geraden entspricht sich selbst.

$\alpha$ ) Wenn zwei ähnliche Punktreihen so liegen, dass der Schnittpunkt ihrer Träger sich selbst entspricht, so sind die Verbindungslinien entsprechender Punkte (Projectionstrahlen) parallel.



**b)** Eine Strecke  $ac$  (Fig. 79) soll in drei Theile getheilt werden, die sich wie drei gegebene Strecken verhalten.

Auflösung. Man ziehe durch den einen Endpunkt der Strecke eine beliebige Gerade und trage auf derselben die gegebenen Strecken nach  $ad'$ ,  $d'b'$ ,  $b'c'$ . Sodann ziehe man  $cc'$  und durch  $d'$  und  $b'$  zwei Gerade, welche mit  $cc'$  parallel sind. Dieselben treffen die Strecke  $ac$  in den gesuchten Theilpunkten  $d$  und  $b$ .

Fig. 77.

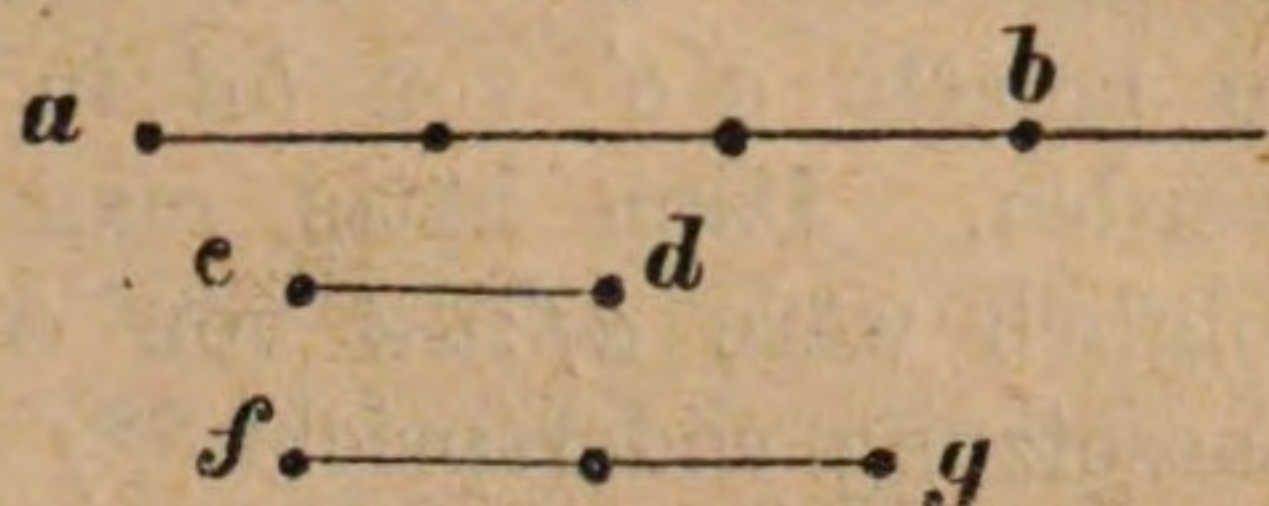


Fig. 78.

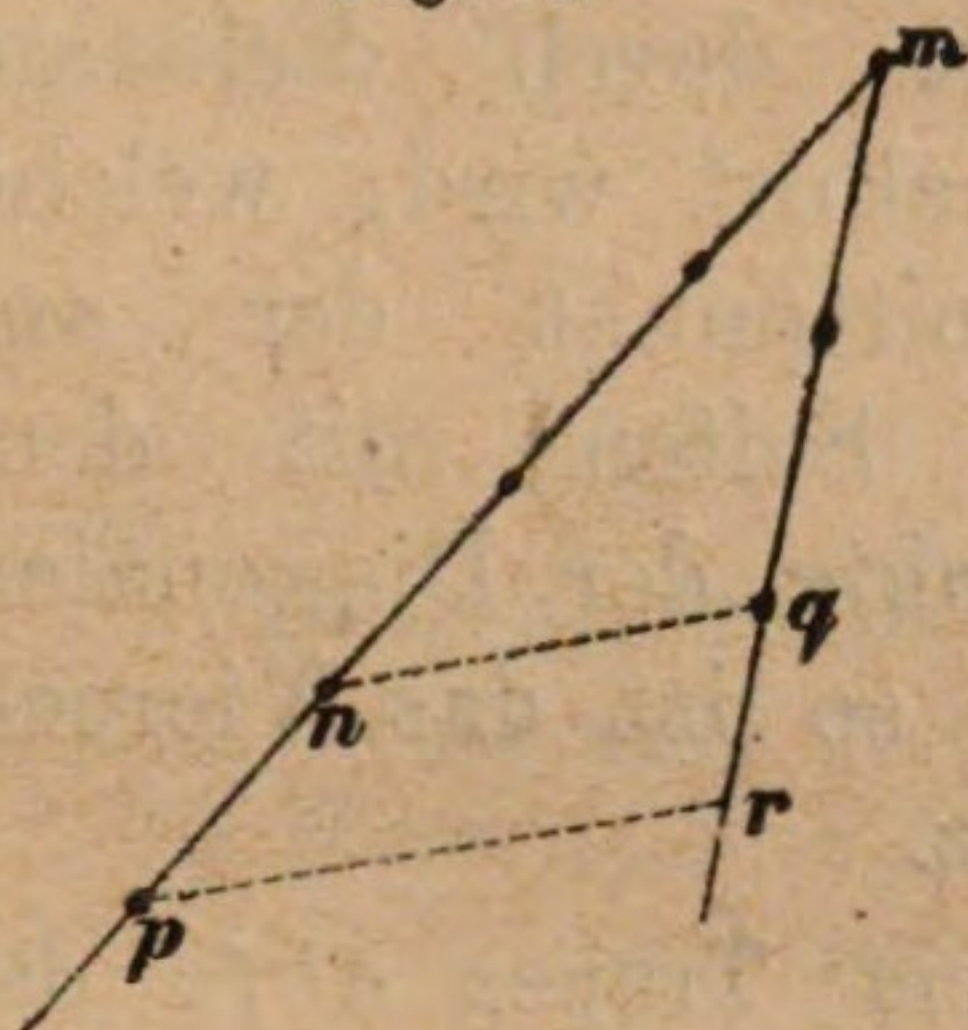
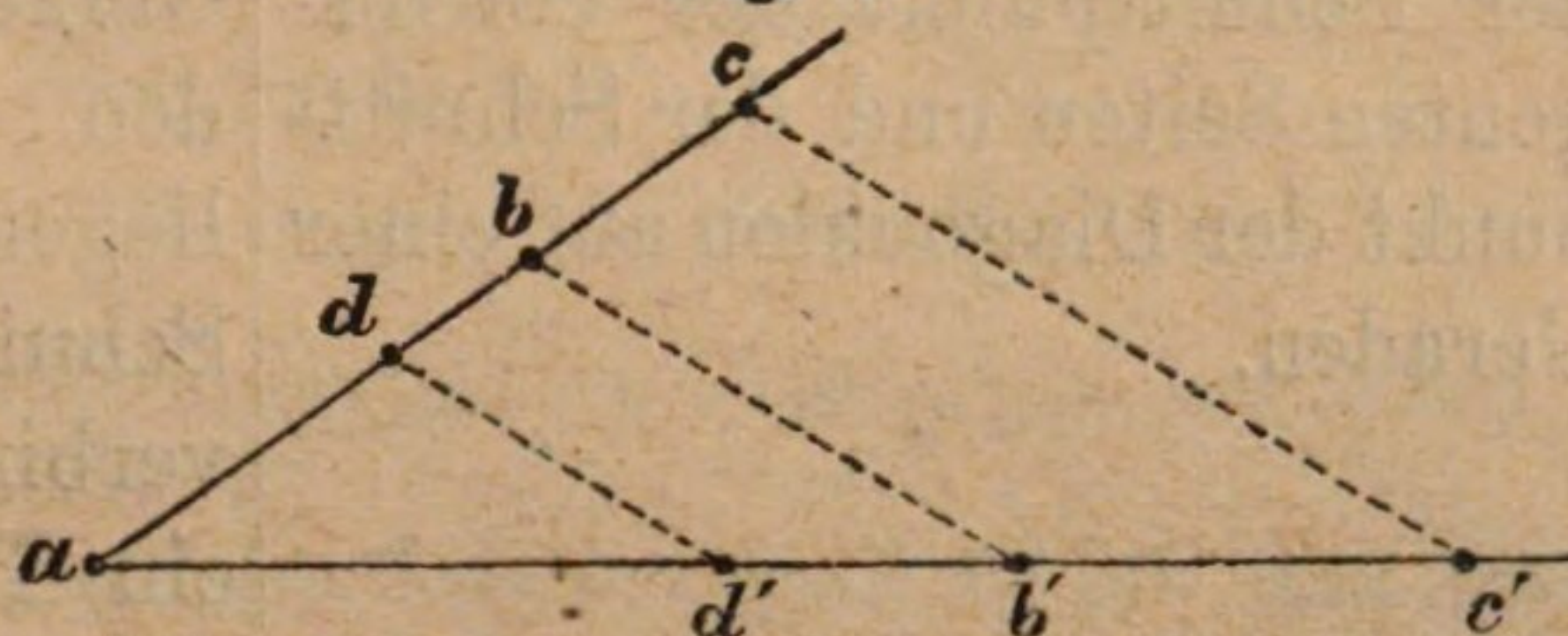


Fig. 79.



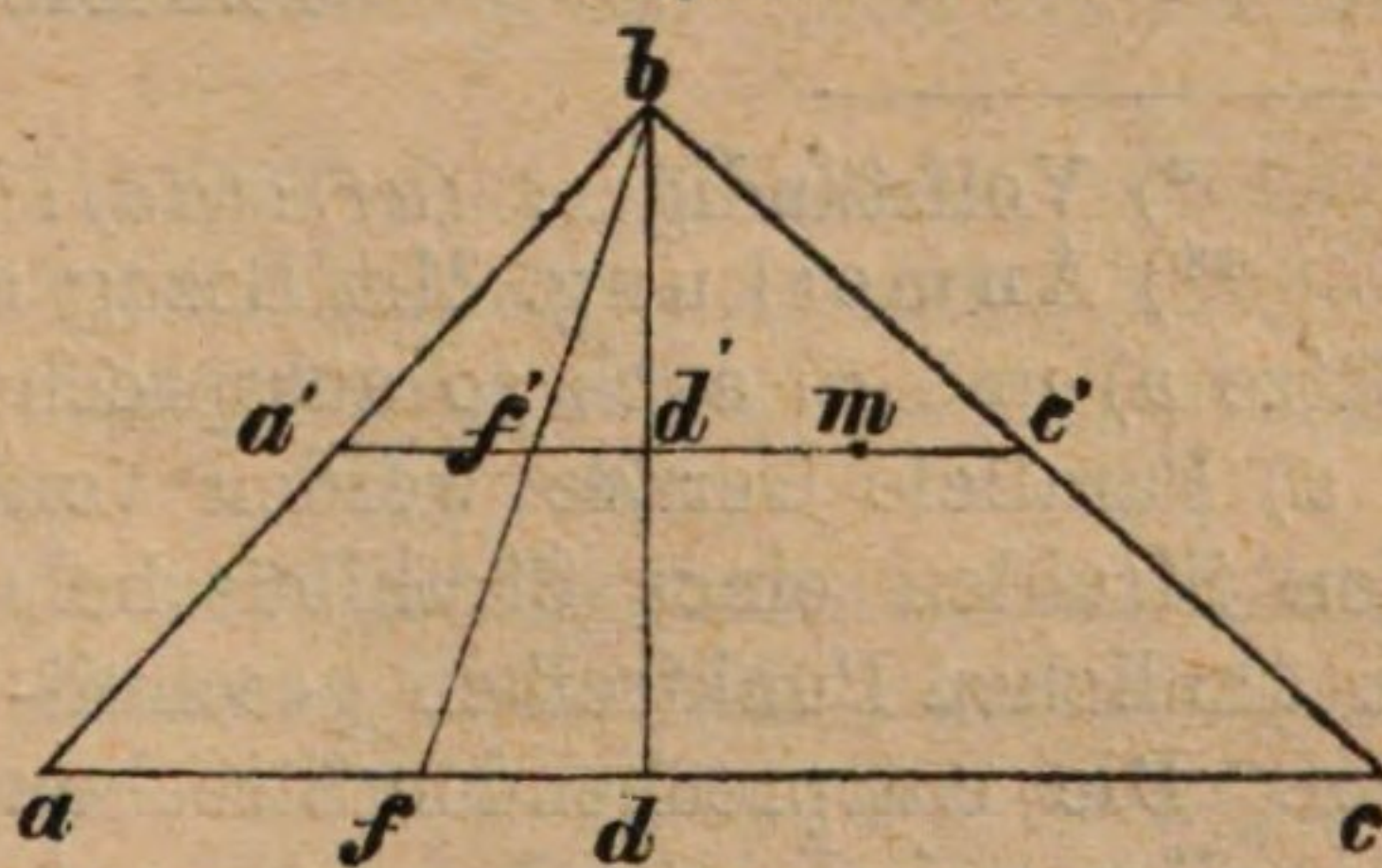
### Durchschnitt paralleler Linien mit Strahlen eines Büschels. § 65.

**a)** Wenn parallele Gerade durch die Strahlen eines Strahlbüschels geschnitten werden, so verhalten sich die Strecken der einen Geraden, wie die entsprechenden Strecken der andern.

**α)** Wenn auf zwei parallelen Geraden entsprechende Punkte so liegen, dass die von einem beliebigen Punkte ausgehenden Abschnitte der einen Geraden sich wie die entsprechenden Strecken der andern verhalten, so liegen die entsprechenden Punkte auf den Strahlen eines Strahlbüschels.

Beweis. (Fig. 80.) **a)** Wenn  $ac$  mit  $a'c'$  parallel ist und die Strecken  $aa'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$ ,  $ff'$  auf den Strahlen eines Strahlbüschels  $b$  liegen, so sind (§ 63 a) die Verhältnisse  $ba : ba'$ ,  $bf : bf'$ ,  $bd : bd'$ ,  $bc : bc'$  einander gleich. Die Verhältnisse  $af : a'f'$ ,  $ad : a'd'$ ,  $fd : f'd'$  können aber nach § 63 a durch eines dieser Verhältnisse ersetzt werden und müssen deshalb auch gleich sein.\*)

Fig. 80.



\*) Vollständiger:  $(af) : (a'f') = (ad) : (a'd') = (fd) : (f'd')$ . — § 62.



$\alpha$ ) Wenn (Fig. 80)  $af : ad : ac = a'f' : a'd' : a'c'$ \*) und  $a'c'$  mit  $ac$  parallel ist, so verlängere man  $aa'$  und  $ff'$  bis zum Schnitt in  $b$ . Würden nun  $b, d', d$  nicht auf einer Geraden liegen, so müsste  $a'c'$  von  $bd$  in einem andern Punkte  $m$  geschnitten werden. Dann hätte man  $af : ad = a'f' : a'm$  (§ 63 a), folglich wäre  $af:ad$  von  $a'f' : a'd'$  verschieden, was der Voraussetzung widerspricht.\*\*)

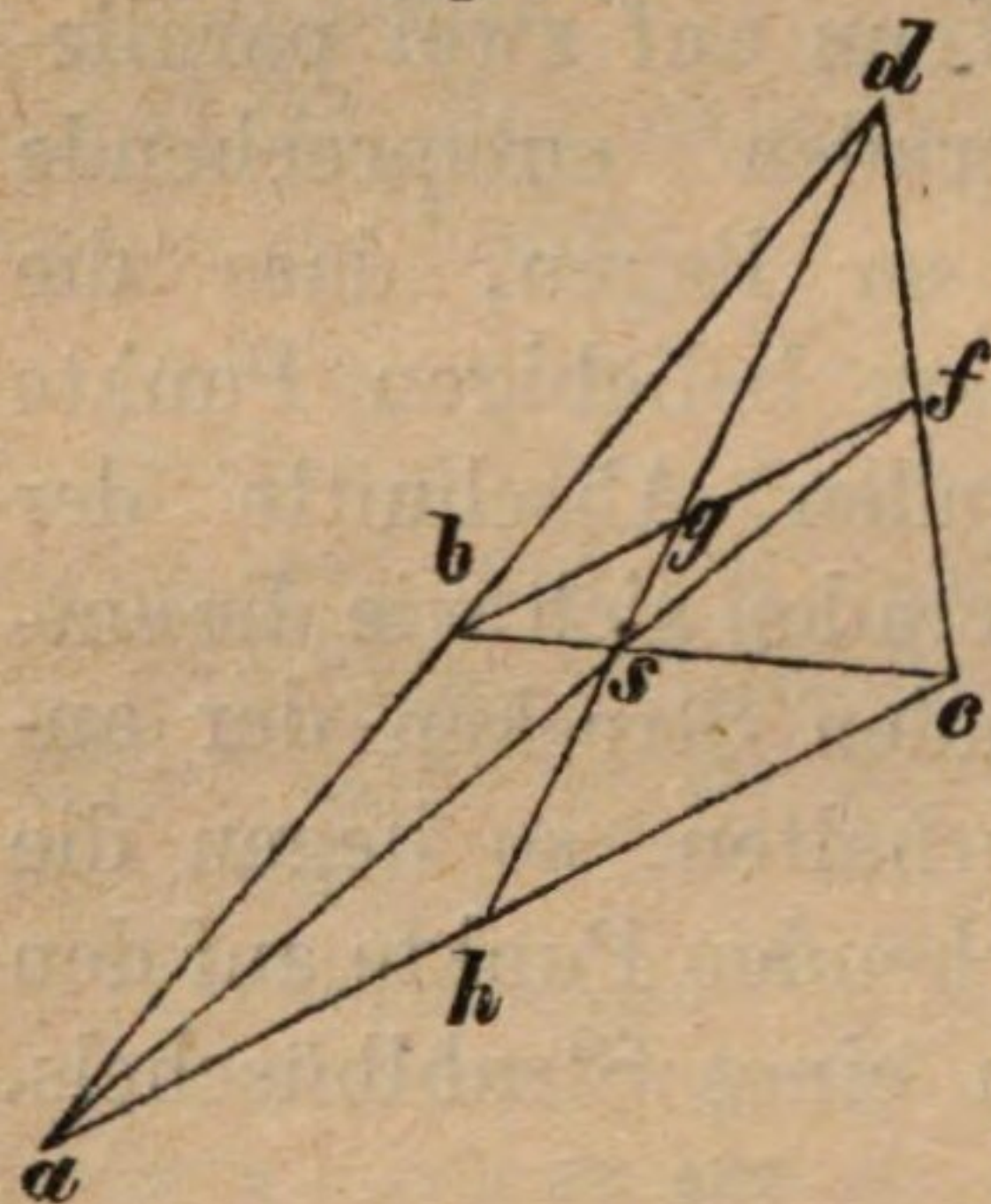
## § 66. Anwendungen.

a) In jedem Trapez liegen die Mittelpunkte paralleler Seiten, der Schnittpunkt der convergenten Seiten und der Schnittpunkt der Diagonalen auf einer Geraden.

$\alpha$ ) Wenn in einem Viereck eine Seite durch diejenige Gerade halbiert wird, welche den Schnittpunkt der anliegenden Seiten mit dem Schnittpunkte der Diagonalen verbindet, so ist das Viereck ein Trapez.

Beweis. (Fig. 81.) a) Wenn in dem Trapez  $abfc$  die Punkte  $h$  und  $g$  in den Mitten der parallelen Seiten liegen, so hat

Fig. 81.



man  $gb : gf = ha : hc$ . Daher schneiden sich  $ab$  und  $cf$  auf der Geraden  $hg$  (§ 65  $\alpha$ ). Andererseits hat man auch  $gb : gf = hc : ha$ , woraus folgt, dass auch  $af$  und  $bc$  sich auf der Geraden  $gh$  schneiden. (§ 65  $\alpha$ ). Der Beweis von  $\alpha$ ) wird indirect geführt.

Anmerkung. Die Strecke  $gh$  wird in  $s$  und  $d$  nach dem Verhältniss der parallelen Seiten  $ac$  und  $bf$  getheilt. Die Diagonalen theilen sich gegenseitig nach demselben Verhältniss (§ 65  $\alpha$ , Anmerk.)

\*) Vollständiger:  $(af):(ad):(ac) = (a'f'):(a'd'):(a'c')$ . — § 62.

\*\*) Anmerkung. Mit Bezug auf die Anm. zu § 63 kann man die Sätze a) und  $\alpha$ ) auch so aussprechen:

a) Parallele Gerade werden von den Strahlen eines Strahlbüschels in ähnlichen Punktreihen geschnitten. Die entsprechenden Strecken derselben sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem der Mittelpunkt des Büschels ausserhalb oder innerhalb des Streifens gelegen ist.

$\alpha$ ) Wenn die Träger zweier ähnlichen Punktreihen parallel laufen, so sind alle Projectionsstrahlen Strahlen eines Büschels. Der Scheitel desselben theilt die Projectionsstrahlen ausserhalb oder innerhalb nach dem Verhältniss entsprechender Strecken.



b) Die Geraden aus den Mitten der Dreieckseiten nach den gegenüberliegenden Ecken (die Schwerpunktstransversalen) schneiden sich in einem Punkte (Schwerpunkt) und theilen sich nach dem Verhältniss 1:2.

Beweis. Wenn  $h, b, f$  (Fig. 81) die Mitten der Seiten des Dreiecks  $abc$  sind, so schneiden sich  $af, cb$  und  $dh$  in einem Punkte  $s$ . Dies folgt aus a), wenn man bedenkt, dass nach § 28  $\gamma$   $bf$  mit  $ac$  parallel ist und  $bf$  nach § 65 a von  $dh$  in  $g$  halbt wird. Die zweite Behauptung erweist sich aus der Anmerkung zu a) und § 28  $\gamma$ .

### Uebungen.

§ 67.

1) Eine Strecke zu construiren, von der eine gegebene Strecke  $\frac{5}{9}$  ist.

2) Eine Strecke zu construiren, welche zu einer gegebenen Strecke in dem Verhältniss  $2\frac{1}{3} : 4\frac{3}{4}$  steht.

3) Wenn  $a, b, c, m, n$  gegebene Strecken sind, so soll man eine Strecke  $x$  so construiren, dass

$$x = \frac{a \times b \times c}{m \times n}.$$

4) Zwei Strecken zu zeichnen, wenn gegeben ist:

$\alpha$ ) die Summe und das Verhältniss derselben,

$\beta$ ) die Differenz und das Verhältniss derselben.

5) Eine gegebene Strecke in 3 Theile  $x, y, z$  zu theilen, so dass sich verhält

$$x : y = n : p.$$

$$y : z = q : r.$$

6) Die folgenden Lehrsätze zu beweisen, indem man aus einer Gleichung zwischen zwei Producten eine Proportion ableitet:

$\alpha$ ) Wenn zwei Dreiecke gleiche Fläche haben, so verhalten sich ihre Grundlinien umgekehrt, wie ihre Höhen.

$\beta$ ) Wenn man aus einem Punkte der Diagonale eines Parallelogramms Senkrechten auf zwei Seiten desselben zieht, welche sich in einem Endpunkte der Diagonale schneiden, so verhalten sich jene Senkrechten umgekehrt wie diese Seiten.

7) Wenn man zwischen die Schenkel eines Winkels parallele Strecken legt, so ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche diese Strecken nach demselben Verhältniss theilen, eine durch den Scheitel des Winkels gehende Gerade.

8) Wenn man in den Punkten  $a, b, c \dots$  (Fig. 74) einer Geraden parallele Strecken  $aa', bb', cc', \dots$  errichtet, die sich wie die Abstände der Punkte  $a, b, c \dots$  von dem Punkte  $s$  verhalten, so liegen  $a', b', c' \dots$  auf einer zweiten durch  $s$  gehenden Geraden. (Beweis indirect oder durch Anwendung von 7.)

9) Wenn man durch den Scheitel eines Winkels eine Gerade zieht, so ist für jeden Punkt dieser Geraden das Verhältniss der Abstände von den Schenkeln des Winkels gleich gross.



10) Der geometrische Ort derjenigen Punkte, für welche das Verhältniss ihrer Abstände von zwei convergenten Geraden den gegebenen Werth  $m:n$  hat, besteht aus den Diagonalen eines Parallelogramms, dessen Seiten die Längen  $2m$  und  $2n$  haben, während zugleich die Mitten der Seiten in den gegebenen Geraden liegen.

11) Wie liegen diejenigen Geraden, für welche das Verhältniss ihrer Abstände von zwei gegebenen Punkten  $a$  und  $b$  einen gegebenen Werth hat,  $\alpha$ ) wenn diese Geraden die Strecke zwischen  $a$  und  $b$  treffen,  $\beta$ ) wenn dies nicht der Fall ist?

12) In einer gegebenen Geraden einen Punkt zu bestimmen, für welchen das Verhältniss seiner Abstände von zwei andern Geraden einen gegebenen Werth hat.

13) Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, für welche das Verhältniss ihrer Abstände von zwei andern Punkten einen gegebenen Werth hat.

14) Einen Punkt so zu bestimmen, dass seine Abstände von 3 gegebenen Geraden in folgenden Verhältnissen stehen:

$\alpha$ ) wie  $1:2:3$ ,  $\beta$ ) wie  $1:1:3$ ,  $\gamma$ ) wie  $1:1:1$ . (Vier Auflösungen.)

15) Eine Gerade so zu ziehen, dass ihre Abstände von 3 gegebenen Punkten in folgenden Verhältnissen stehen:

$\alpha$ ) wie  $1:2:3$ ,  $\beta$ ) wie  $1:1:3$ ,  $\gamma$ ) wie  $1:1:1$ . (Vier Auflösungen.)

16) Es sei ein Winkel mit dem Scheitel  $s$  und ein Punkt  $t$  gegeben. Man soll durch  $t$  eine Gerade ziehen, welche die Winkelschenkel in den Punkten  $x$  und  $y$  so trifft, dass

$\alpha$ )  $sx:sy = m:n$ ,  $\beta$ )  $sx:tx = m:n$ ,  $\gamma$ )  $tx:ty = m:n$ . (Je zwei Auflösungen.)

17) Man soll 3 Punkte  $a, b, c$  einer Punktreihe so in einen Strahlbüschel, von welchem die Strahlen  $a', b', c'$  gegeben sind, hinein legen, dass die Punkte  $a, b, c$  bezüglich in die Strahlen  $a', b', c'$  fallen.

## II. Abschnitt.

### Harmonische Punkte. Transversalen der Dreiecke.

#### \*§ 68. Harmonische Punkte.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) Erklärung. Wenn eine Strecke <math>ab</math> (Fig. 82) von den Punkten <math>c</math> und <math>d</math> innen und aussen nach demselben Verhältniss getheilt wird, so nennt man die Punkte <math>a, c, b, d</math>, 4 harmonische Punkte. Eine solche harmonische Punktreihe</p> | <p><math>\alpha</math>) Lehrsatz. Wenn die Strecke <math>ab</math> durch die Punkte <math>c</math> und <math>d</math> harmonisch getheilt wird, so wird auch die Strecke <math>cd</math> durch die Punkte <math>a</math> und <math>b</math> harmonisch getheilt oder: In einer harmonischen Punktreihe wird der Abstand je zweier</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



enthält zwei Paare zugeordneter Punkte  $a$  und  $b$ ,  $c$  und  $d$ . Die Punkte des einen Paares sind durch einen Punkt des andern getrennt. zugeordneter Punkte durch die übrigen Punkte harmonisch getheilt.

Beweis.  $\alpha$ ) Man leite zunächst, ohne auf die Vorzeichen der Strecken Rücksicht zu nehmen, aus der Proportion  $ca:cb = da:db$ , welche der Voraussetzung

Fig. 82.

nachgilt, durch Vertauschung der mittleren Glieder  $ac:ad = bc:bd$  ab, woraus die Behauptung mit Berücksichtigung der gegenseitigen Lage der Punkte sich ergibt.

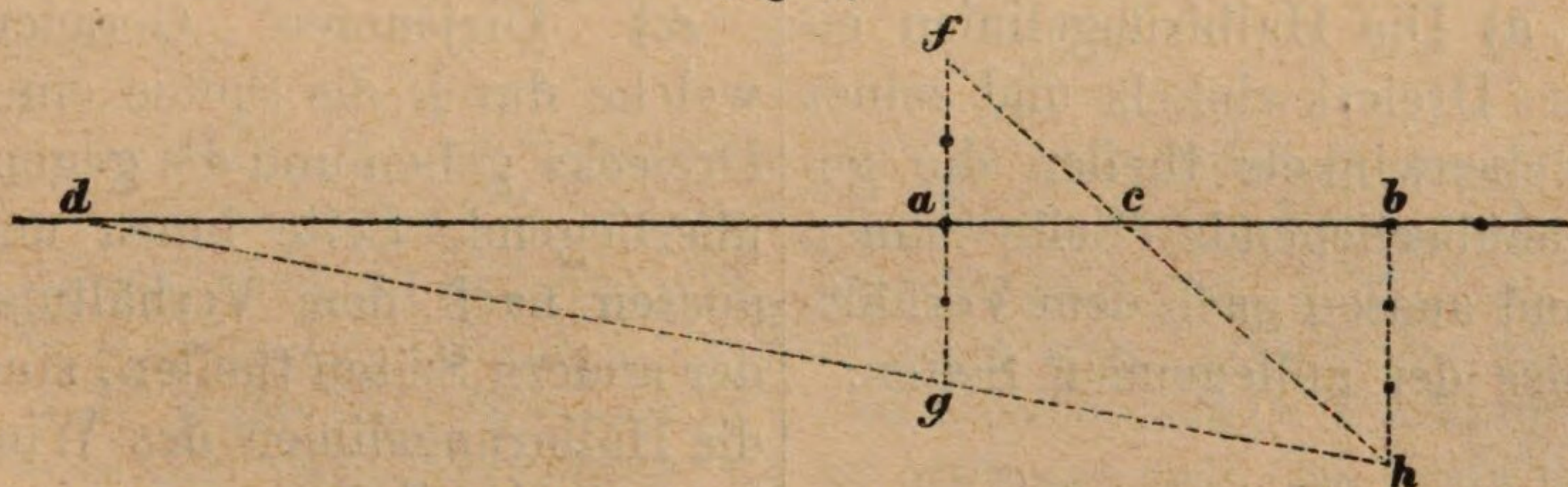
Anmerkung. Mit Berücksichtigung der Vorzeichen gelten die Gleichungen  $(ca):(cb) = -((da):(db))$  und  $(ac):(ad) = -((bc):(bd))$ .

### Aufgaben.

$\beta$ ) Eine Strecke  $ab$  nach einem gegebenen Verhältniss  $m:n$  harmonisch zu theilen.  $\beta$ ) Zu den Punkten  $a, c, b$  einer Geraden den zu  $c$  zugeordneten vierten harmonischen Punkt zu finden.

Auflösung. (Fig. 83.)  $\alpha$ ) Man ziehe durch  $a$  und  $b$  Parallelen (in der Figur sind dieselben senkrecht) und trage die Länge  $m$  von  $a$  aus nach beiden Seiten und die Länge  $n$  von  $b$  aus nach einer Seite auf den Parallelen ab. Die Verbindungslinien der er-

Fig. 83.



haltenen Endpunkte schneiden die Strecke  $ab$  und ihre Verlängerung in den gesuchten Punkten  $c$  und  $d$  (§ 63 a).

$\alpha$ ) Man ziehe durch  $a$  und  $b$  Parallelen und durch  $c$  eine beliebige Gerade, welche dieselbe in  $f$  und  $h$  schneidet. Trägt man nun  $ag = af$  nach der entgegengesetzten Richtung auf, so bestimmt die Gerade  $gh$  auf der Verlängerung von  $ab$  den gesuchten Punkt  $d$ .

$c$ ) Es gibt unendlich viele Punktpaare, welche die Strecke  $ab$  harmonisch theilen. Dem Mittelpunkte von  $ab$  gehört der unendlich ferne Punkt der Geraden als vierter



harmonischer Punkt zu. Wenn der Punkt  $c$  aus der Mitte von  $ab$  gegen  $a$  rückt, so bewegt sich der vierte harmonische Punkt  $d$  von links her aus unendlicher Ferne gegen  $a$  um zugleich mit  $c$  in  $a$  anzukommen. Wenn der Punkt  $c$  sich aus der Mitte von  $ab$  gegen  $b$  bewegt, so rückt der vierte harmonische Punkt  $d$  von rechts her aus unendlicher Ferne gegen  $b$  um zugleich mit  $c$  in  $b$  anzukommen. In  $a$  wie in  $b$  fallen je zwei zugeordnete Punkte in einem einzigen zusammen. Wenn zwei Punkte  $c$  und  $d$  sich so bewegen, dass sie jederzeit die Strecke  $ab$  harmonisch theilen, so bewegen sie sich in entgegengesetzter Richtung. Zwei zugeordnete Punkte liegen auf der gleichen Seite des Mittelpunktes von  $ab$ . Strecken, welche zugeordnete Punkte verbinden, schliessen sich aus oder die kleinere liegt innerhalb der grösseren. Kreise, welche man über solchen Strecken als Durchmesser zieht, können sich nie schneiden.

Beweis. Macht man in Fig. 83 zuerst  $ag = af = bh$ , so wird  $c$  in der Mitte zwischen  $a$  und  $b$  liegen und  $gh$  mit  $ab$  parallel sein. Lässt man nun das eine Mal die Strecken  $ag = af$ , das andere Mal die Strecke  $bh$  bis zum Verschwinden abnehmen und beobachtet man dabei die Ortsveränderung der Punkte  $c$  und  $d$ , so kommt man zu diesen Sätzen.

**\*§ 69. Die Halbirungslinien der Winkel und Aussenwinkel eines Dreiecks.**

a) Die Halbirungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels theilen die gegenüberliegende Seite innen und aussen nach dem Verhältniss der anliegenden Seiten.

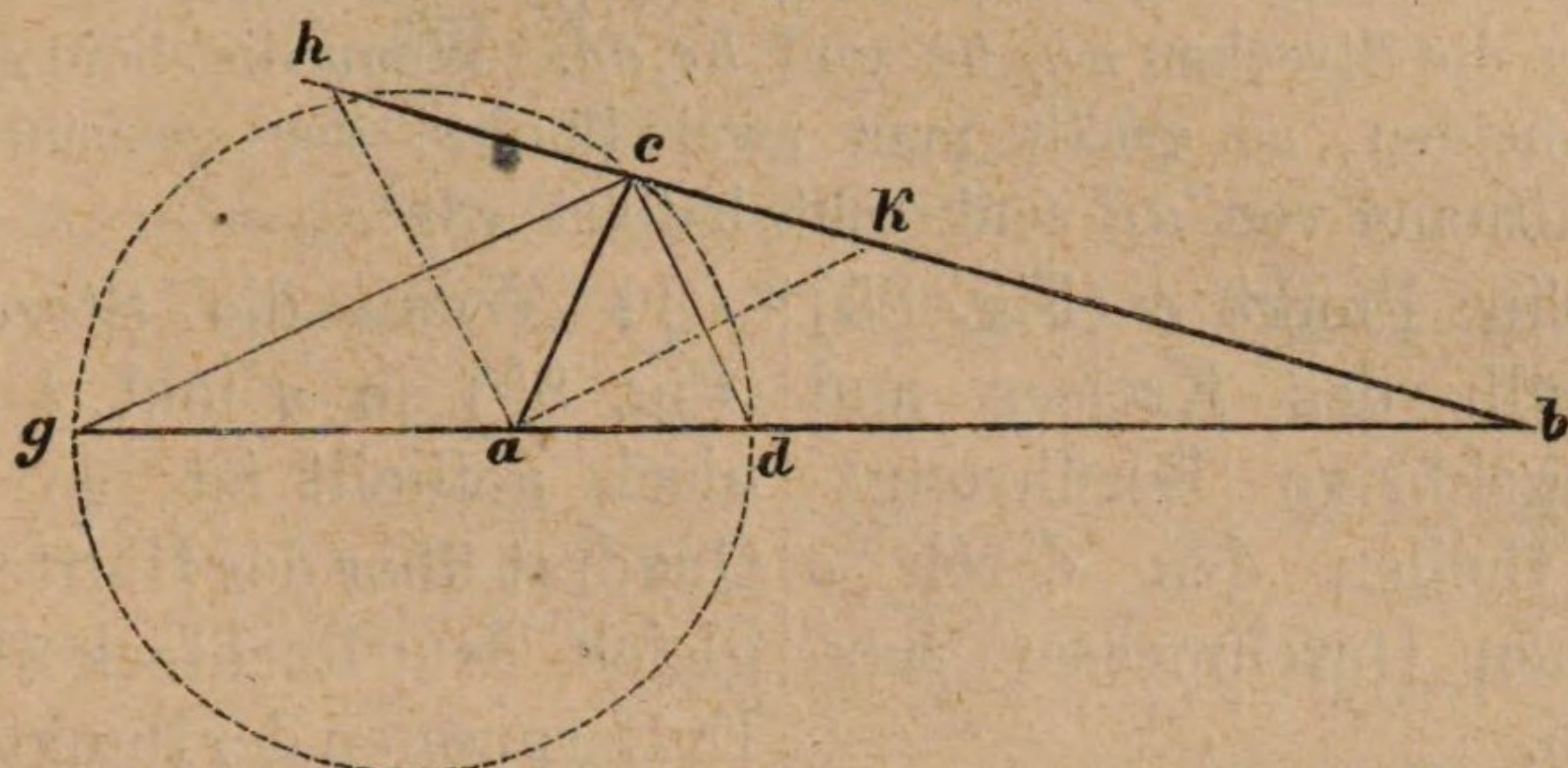
α) Diejenigen Geraden, welche durch die Spitze eines Dreiecks gehen und die gegenüberliegende Seite innen und aussen nach dem Verhältniss der andern Seiten theilen, sind die Halbirungslinien des Winkels an der Spitze und seines Nebenwinkels.

Beweis. (Fig. 84.) a) Wenn die Winkel  $acd$  und  $dcb$  einander gleich sind, so beweise man (§ 9 α und β, § 18 β), dass die durch  $a$  mit  $cd$  gezogene Parallele  $ah$  ein gleichschenkliges Dreieck  $ahc$  abschneidet. Der Parallelismus von  $ah$  und  $dc$  liefert die Proportion  $da : db = ch : cb$  (§ 63 a), woraus man durch Einsetzen von  $ca$  für  $ch$  erhält:  $da : db = ca : cb$ . Wenn andererseits die Winkel  $acg$  und  $gch$  gleich sind, so ziehe man  $ak$  mit



$gc$  parallel und verfähre ganz wie im Vorigen, um  $ga : gb = ca : cb$  zu erhalten. Aus diesen beiden Proportionen folgt die Be-

Fig. 84.



hauptung.

Der Beweis von  $\alpha$ ) wird indirect geführt.

### Anwendungen.

§ 70.\*

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>a) Der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten <math>a</math> und <math>b</math> ein gegebenes Verhältniss bilden, ist ein Kreis, welcher <math>ab</math> nach demselben Verhältniss harmonisch theilt und die Strecke zwischen den Schnittpunkten zum Durchmesser hat.</p> | <p><math>\alpha</math>) Der geometrische Ort aller Punkte, von welchen aus zwei Strecken <math>ad</math> und <math>db</math> (Fig. 84) unter gleichen Winkeln gesehen werden, ist ein Kreis, welcher <math>ab</math> in <math>d</math> und <math>g</math> harmonisch theilt und die Strecke <math>dg</math> zum Durchmesser hat.</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Beweis. a) 1) Wenn (Fig. 84)  $ca : cb = da : db = ga : gb$ , so stehen  $cd$  und  $cg$  als Halbirungslinien zweier Nebenwinkel (§ 69  $\alpha$ ) senkrecht auf einander. Hieraus folgt nach § 36 d und § 37 c, dass der Kreis  $gcd$  die Strecke  $gd$  zum Durchmesser hat.

2) Wenn  $da : db = ga : gb$  und  $c$  ein beliebiger Punkt des Kreises über dem Durchmesser  $dg$  ist, so muss auch das Verhältniss  $ca : cb$  dem gemeinsamen Werth der Verhältnisse  $da : db$  und  $ga : gb$  gleich sein. Hätte nämlich  $ca : cb$  einen andern Werth, so würde  $c$  nach 1) noch auf einem zweiten Kreise liegen, welcher  $ab$  nach diesem andern Verhältniss innen und aussen theilt, was unmöglich ist, da nach § 68 c diejenigen Kreise sich nicht schneiden, welche die Abstände zugeordneter Punkte zu Durchmessern haben. Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

$\alpha$ ) Der Beweis ergibt sich aus a) mit Zuziehung von § 69  $\alpha$ .

b) Aufgabe. Auf einer Geraden sind 3 Strecken



$ab$ ,  $bc$  und  $cd$  gegeben. Man soll einen Punkt finden, von welchem aus diese Strecken unter gleichen Winkeln gesehen werden.

Auflösung. Man construire den geometrischen Ort  $\alpha$ ) zweimal, für die Strecken  $ab$ ,  $bc$  und  $bc$ ,  $cd$ . Wenn die beiden Kreise sich schneiden, so erhält man zwei Punkte der gesuchten Art, deren Abstand von  $ad$  senkrecht halbirt wird.

c) Ein Punkt  $c$  (Fig. 85) ausserhalb des Kreises und die zugehörige Berührungsehne theilen den durch  $c$  gezogenen Durchmesser harmonisch.

$\gamma$ ) Wenn die Strecke  $ab$  (Fig. 85) in  $c$  und  $d$  harmonisch getheilt ist, so ist das Quadrat über der Hälfte von  $ab$  gleich dem Rechteck über den Entfernungen der Punkte  $c$  und  $d$  von der Mitte der Strecke  $ab$ .

Beweis. (Fig. 85.) c) Wenn  $co$  und  $cp$  Tangenten und  $ab$  der Durchmesser des Punktes  $c$  ist, so sind die Bogen  $ao$  und  $ap$  und deshalb auch die Winkel  $coa$  und  $doa$  einander gleich. Die Schenkel  $oa$  und  $ob$  des rechten Winkels  $oab$  halbiren also in dem Dreieck  $cod$  den Winkel bei  $o$  und seinen Nebenwinkel, woraus (§ 69 a)  $ac : ad = bc : bd$  (§ 68  $\alpha$ ) und  $ca : cb = da : db$  folgt.

$\gamma$ ) Die Gleichung  $\overline{mo}^2 = \overline{ma}^2 = \overline{mc} \cdot \overline{md}$  ergibt sich aus § 53 a, da  $od$  die Höhe in dem rechtwink-

ligen Dreieck  $moc$  ist.

Anmerkung. Es ist leicht zu sehen, dass diese Gleichung auch mit Berücksichtigung der Vorzeichen gilt:  $(mo)^2 = (ma)^2 = (mc) \cdot (md)$ . Auch kann der Satz umgekehrt werden.

### § 71.\* Involutorische Punktreihen.

a) Erklärung. Wenn  $m$  ein Punkt einer Geraden (Fig. 86)  $\alpha$ ) Aufgabe. Wenn der Mittelpunkt  $m$  und die Potenz

Fig. 86.

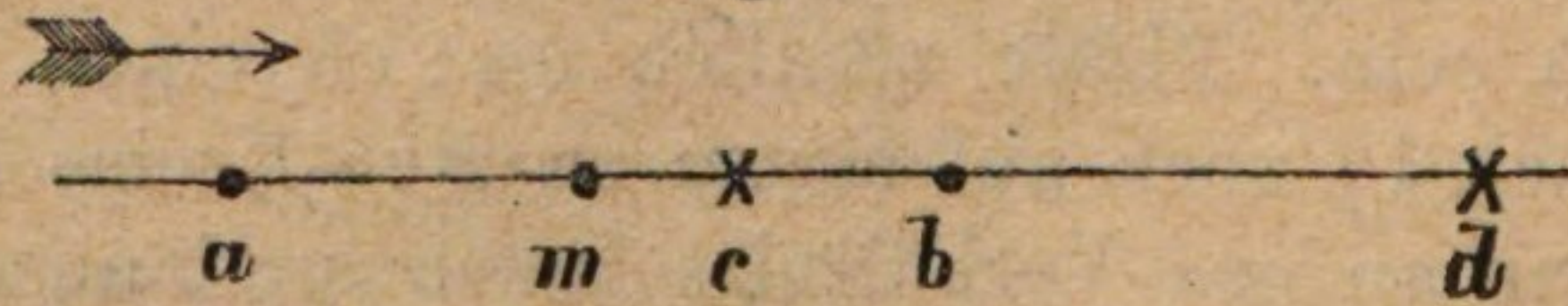
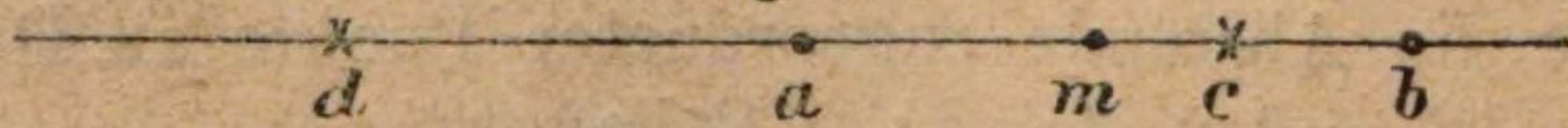


Fig. 87.



86 und 87) und  $k$  eine positive oder negative Grösse ist,  $k$  einer involutorischen Reihe gegeben sind, so soll man zu



so bilden alle Paare von Punkten  $c, d$ , welche der Gleichung  $(mc) \cdot (md) = k$  genügen, eine involutorische Punktreihe. Je zwei Punkte  $c, d$  heissen zugeordnet.  $m$  ist der Mittelpunkt und  $k$  die Potenz der involutorischen Reihe.

einem beliebigen Punkt  $c$  der Geraden den zugeordneten Punkt  $d$  construiren.

Auflösung.  $\alpha$ ). Wenn  $x$  den absoluten Werth der Potenz  $k$  bedeutet, so bestimme man eine Strecke  $md$  derart, dass die Proportion  $1 : mc = md : x$  erfüllt ist (§ 64 a) und trage die Strecke  $md$  auf der Geraden so auf, dass sie mit  $mc$  gleiche oder entgegengesetzte Richtung hat, je nachdem  $k$  positiv oder negativ ist, wodurch die Gleichung  $(mc) \cdot (md) = k$  erfüllt wird.

**b)** Wenn die Potenz einer involutorischen Reihe positiv ist, so existiren zwei sich selbst zugeordnete Punkte der Reihe (Doppelpunkte). Die übrigen Punktpaare theilen den Abstand der Doppelpunkte harmonisch.

**$\beta$ )** Alle Punktpaare, welche eine Strecke  $ab$  harmonisch theilen, bilden eine involutorische Punktreihe, deren Doppelpunkte  $a$  und  $b$  sind. Der Mittelpunkt der Reihe halbirt den Abstand  $ab$ .

Beweis. **b)** Wenn  $m$  (Fig. 85) der Mittelpunkt der involutorischen Reihe und  $c, d$  zwei zugeordnete Punkte sind (welche auf derselben Seite von  $m$  liegen müssen [§ 71  $\alpha$ ]), so construire man über  $mc$  als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem  $d$  der Fusspunkt der Höhe ist. Die Kathete  $mo$  trage man auf beiden Seiten von  $m$  ab, wodurch man zu den Punkten  $a$  und  $b$  kommt. Dann gilt die Gleichung  $(mc) \cdot (md) = (ma)^2 = (mb)^2$ , aus welcher folgt, dass  $c, d$  den Abstand  $ab$  harmonisch theilen. Durch Vergleichung mit  $(mc) \cdot (md) = k$  schliesst man aber  $(ma)^2 = (mb)^2 = k$ , woraus folgt, dass  $a$  und  $b$  zwei sich selbst zugeordnete Punkte der Reihe sind.  $\alpha$ ) folgt unmittelbar aus § 70  $\gamma$  und § 71 a.

**c)** Wenn die Potenz einer involutorischen Punktreihe negativ ist, so enthält die Reihe

**$\gamma$ )** Wenn man in einer involutorischen Reihe mit Doppelpunkten einen Punkt je-



keine sich selbst zugeordneten Punkte.

des Paares mit dem zu  $m$  symmetrisch gelegenen Punkte vertauscht, so erhält man Punktpaare einer involutorischen Reihe ohne Doppelpunkte. Die früheren Doppelpunkte sind jetzt zugeordnet.

Beweis. c) Die Behauptung ergibt sich daraus, dass für einen negativen Werth von  $k$   $mc$  und  $md$  entgegengesetzt gerichtet sein müssen.  $\gamma$ ) Wenn  $(ma)^2 = (mb)^2 = (mc) \cdot (md)$  die Gleichung der involutorischen Reihe mit den Doppelpunkten  $a$  und  $b$  ist (Fig. 86), und man den Punkt  $d$  mit dem zu  $m$  symmetrisch gelegenen vertauscht, welcher wieder  $d$  heissen soll (Fig. 87), so heisst die durch das neue Punktpaar erfüllte Gleichung  $(mc)(md) = -(ma)^2$ , worin nach  $a$ ) und  $c$ ) der Beweis liegt. Die Punkte  $a$  und  $b$  sind zugeordnet, weil auch  $(ma)(mb) = -(ma)^2$  ist.

d) Wenn in einer involutorischen Reihe ohne Doppelpunkte ein Punkt sich bewegt, so bewegt sich der zugeordnete nach der gleichen Richtung. Strecken, welche entsprechende Punkte verbinden, fallen theilweise über einander. Kreise, welche über solchen Strecken als Durchmessern gezeichnet sind, müssen sich schneiden. (Zum Beweis vergleiche § 68 c und § 71  $\gamma$ .)

## § 72.\* Transversalen des Dreiecks. — Vollständiges Viereck.

Wenn innerhalb der Seiten eines Dreiecks  $abc$  (Fig. 88) oder auf ihren Verlängerungen drei Punkte  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  liegen, so können die drei Abstandsverhältnisse (§ 62) derselben von den Ecken  $a, b, c$  nur auf die beiden Arten:

$$(b'a):(b'c), (a'c):(a'b), (c'b):(c'a) \text{ und } (b'c):(b'a), (a'b):(a'c), (c'a):(c'b)$$

so geschrieben werden, dass sowohl in den ersten, wie in den zweiten Gliedern der Verhältnisse alle drei Ecken des Dreiecks vorkommen. Die so angeschriebenen Verhältnisse sollen kurz als die Abstandsverhältnisse der 3 Punkte von den Ecken des Dreiecks bezeichnet werden.

a) Wenn die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen von einer Geraden ge-

$\alpha$ ) Wenn auf den Seiten eines Dreiecks oder ihren Verlängerungen drei Punkte

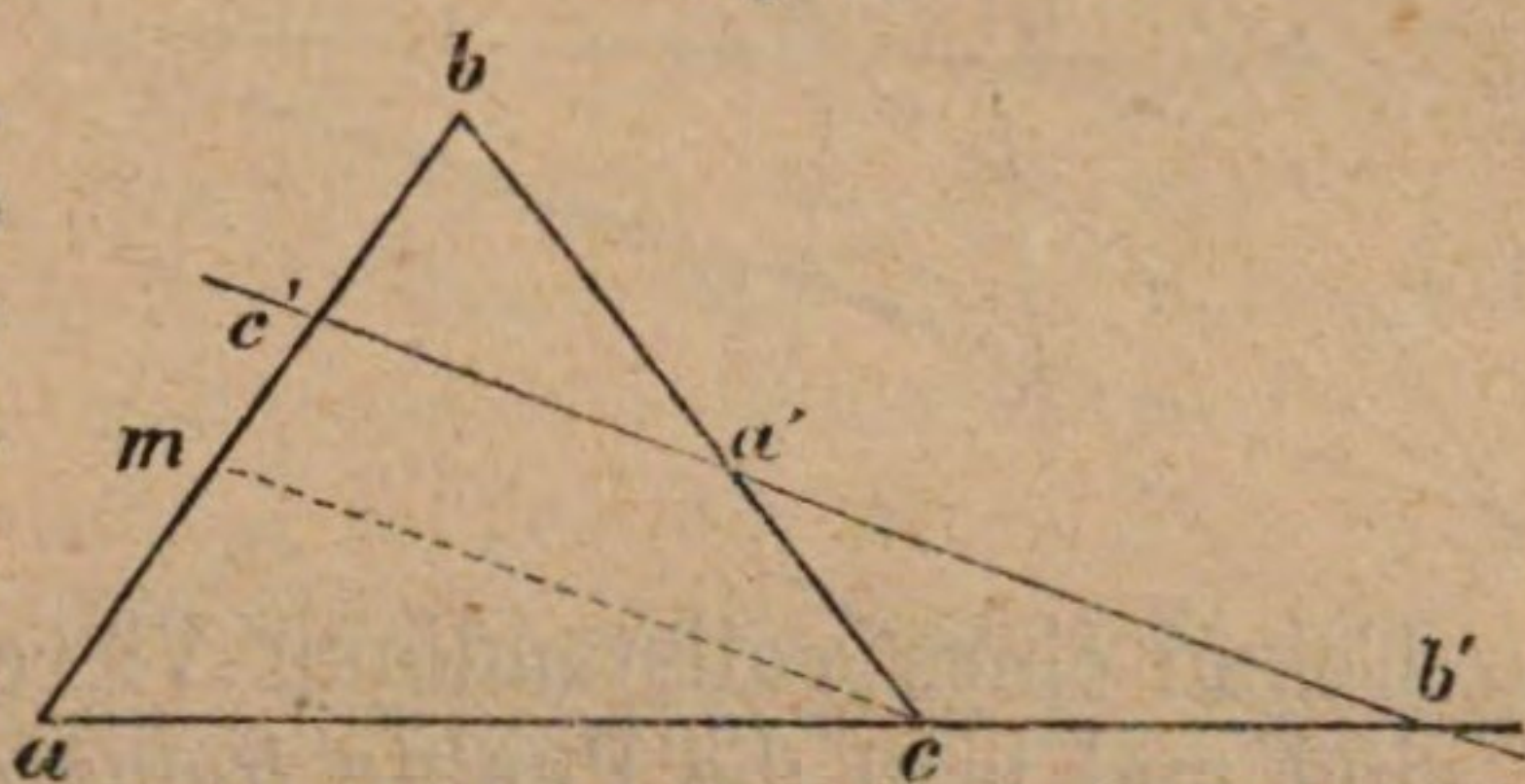


schnitten werden, so ist das Product der Abstandsverhältnisse der Schnittpunkte von den Ecken des Dreiecks dem positiven Werthe der Einheit gleich.

so liegen, dass das Product ihrer Abstandsverhältnisse von den Ecken des Dreiecks dem positiven Werthe der Einheit gleich ist, so liegen die 3 Punkte auf einer Geraden.

Beweis. a)  $a', b', c'$  (Fig. 88) seien Punkte einer Geraden. Zieht man  $cm$  mit derselben parallel, so kann man, ohne

Fig. 88.



noch auf die Vorzeichen der Strecken Rücksicht zu nehmen, nach § 63 a die Verhältnisse  $b'a : b'c$  und  $a'c : a'b$  durch die Verhältnisse  $c'a : c'm$  und  $c'm : c'b$  ersetzen. Multiplicirt man noch das Product der beiden letzten Verhältnisse mit  $c'b : c'a$ , so hebt sich Alles fort und es bleibt für das Product der Werth 1. In Bezug auf das Vorzeichen des Productes erkennt man leicht, dass dasselbe positiv sein muss. Daraus nämlich, dass die Transversale entweder alle Seiten ausserhalb oder zwei derselben innerhalb und die dritte ausserhalb theilt, folgt, dass entweder alle Abstandsverhältnisse positiv oder eines derselben positiv und die beiden andern negativ sind.

$\beta$ ) Wenn  $\frac{(b'a)}{(b'c)} \cdot \frac{(a'c)}{(a'b)} \cdot \frac{(c'b)}{(c'a)} = +1$ , so müssen die Punkte  $a'b'c'$  auf einer Geraden liegen. Wenn nämlich dies nicht der Fall wäre, sondern die Gerade  $ac$  von  $a'c'$  in einem andern Punkte  $p$  geschnitten würde, so hätte man  $\frac{(pa)}{(pc)} \cdot \frac{(a'c)}{(a'b)} \cdot \frac{(c'b)}{(c'a)} = +1$ . Aus der Gleichheit der Producte und zweier Factoren schliesst man die Gleichheit von  $\frac{(pa)}{(pc)}$  und  $\frac{(b'a)}{(b'c)}$ . Die Strecke  $ac$  würde also in zwei Punkten nach dem gleichen Abstandsverhältniss getheilt, was unmöglich ist.

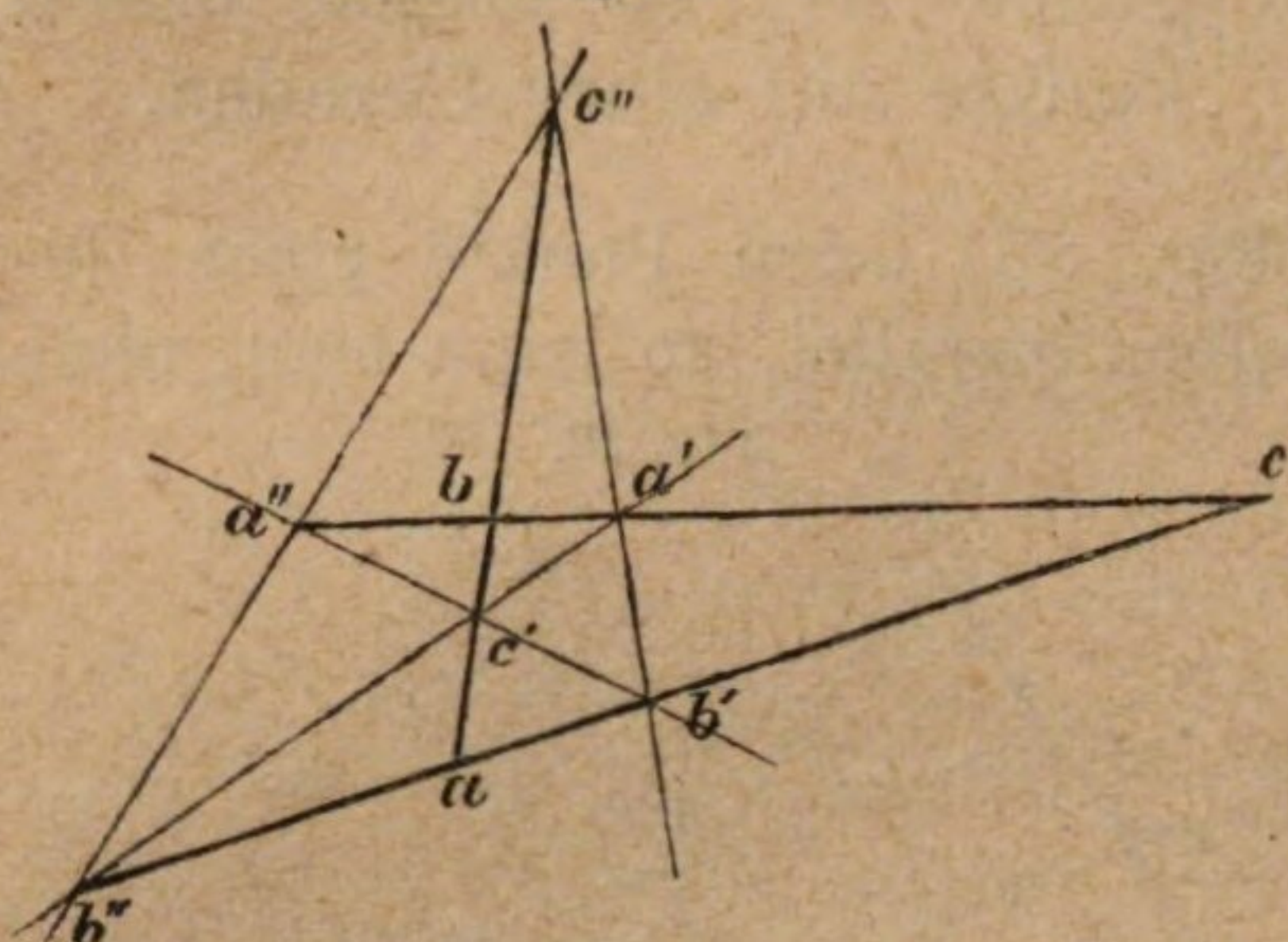
b) Wenn man die Punkte  $a', b'$  (Fig. 89) auf den Richtungen zweier Seiten des Dreiecks  $abc$  beliebig wählt und die zugehörigen vierten harmonischen Punkte  $a'', b''$  construirt, so schneiden sich die Geraden  $a'b'$  und  $a''b''$  auf der dritten Dreieckseite.

$\beta$ ) In jedem vollständigen Viereck werden die einem Nebeneck zugehörigen Gegenseiten von der Verbindungslinie der beiden übrigen Nebenecken harmonisch getheilt.



Beweis. (Fig. 89.) b) Wenn die Seite  $ba$  von  $b'a'$  in  $c''$  geschnitten wird, so ist das Product der Abstandsverhältnisse der Punkte  $a', b', c''$  in Bezug auf die Ecken des Dreiecks  $abc$  gleich  $+1$  (a). Wenn man die Punkte  $a'$  und  $b'$  mit den vierten harmonischen Punkten  $a'', b''$  ver-

Fig. 89.



tauscht, so wechseln zwei dieser Abstandsverhältnisse das Zeichen, während dadurch das Product der drei Abstandsverhältnisse unverändert bleibt. Die Punkte  $a'', b'', c''$  liegen daher ebenfalls auf einer Geraden ( $\alpha$ ), was zu beweisen war.

$\beta$ ) Wenn  $a'', a', b'', b'$  die Ecken eines vollständigen Vierecks mit den Nebenecken  $c, c'$  sind und man die Punkte  $b$  und  $a$  construirt, welche mit  $c$  zusammen die Gegenseiten  $a'a''$  und  $b'b''$  des Vierecks harmonisch theilen, so bilden die Geraden  $a'b'$  und  $a''b''$  zwei Transversalen des Dreiecks  $abc$ , welche sich nach b) auf  $ab$  schneiden müssen. Das Nebeneck  $c''$  ist also auf der Geraden  $ab$  gelegen. Ganz ebenso folgt, dass auch die Geraden  $b'a''$  und  $b''a'$  sich auf  $ab$  schneiden, womit der Beweis geliefert ist.

c) Zusatz. Die Punkte  $c', c'', b, a$  sind selbst 4 harmonische Punkte.

Beweis. Wenn man  $a'', c'', a', c'$  als die Ecken eines vollständigen Vierecks mit den Nebenecken  $b'b''b'$  ansieht, so ergibt sich die Behauptung aus  $\beta$ .

## § 73.\*

## Uebungen.

- 1) In einer Geraden einen Punkt zu finden, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten sich wie 2:3 verhalten.
- 2) Einen Punkt zu finden, dessen Abstände von den Ecken eines Dreiecks sich verhalten,  $\alpha$ ) wie 1:2:3,  $\beta$ ) wie 1:1:3,  $\gamma$ ) wie 1:1:1
- 3) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Grundlinie, das Verhältniss der beiden andern Seiten und  $\alpha$ ) die Höhe,  $\beta$ ) der Winkel an der Spitze gegeben ist.
- 4) Eine Grösse  $x$  heisst das harmonische Mittel zwischen zwei andern Grössen  $r$  und  $s$ , wenn die Proportion  $r - x : x - s = r : s$  besteht. Man soll nun beweisen, dass der Abstand  $cd$  (Fig. 86) zweier zugeordneter harmonischer Punkte das harmonische Mittel zwischen  $ad$  und  $bd$  ist.
- 5) Verbindet man irgend einen Punkt auf der Peripherie eines



Kreises mit den Endpunkten eines Durchmessers, so theilen diese Linien jede zu dem Durchmesser senkrechte Sehne harmonisch.

6) Verbindet man irgend einen Punkt auf der Peripherie eines Kreises mit den Endpunkten einer Sehne, so wird der zu dieser Sehne senkrechte Durchmesser harmonisch getheilt.

7) Mit Anwendung von 6) beliebig viele Punktpaare einer involutorischen Reihe zu finden, wenn die Doppelpunkte gegeben sind.

8) Mit Anwendung von 6) und § 71  $\gamma$  beliebig viele Punktpaare einer involutorischen Reihe ohne Doppelpunkte zu finden, wenn dasjenige Punktpaar gegeben ist, dessen Abstand durch den Mittelpunkt der Reihe halbirt wird.

9) Wenn man durch einen Punkt  $m$  in der Ebene eines Dreiecks nach den Ecken Transversalen zieht, welche die Gegenseiten in drei Punkten treffen, so wird jede Seite durch den auf ihr liegenden Punkt und die Verbindungslinie der beiden andern harmonisch getheilt (72  $\beta$ ).

10) Wenn man durch einen Punkt  $c'$  in der Ebene eines Dreiecks  $b''c''b'$  (Fig. 89) von den Ecken aus Transversalen zieht, welche die Seiten des Dreiecks in den Punkten  $a, a', a''$  treffen, so ist das Product der Abstandsverhältnisse der Punkte  $a, a', a''$  von den Ecken des Dreiecks dem negativen Werthe der Einheit gleich. (Lehrsatz des Ceva.) (Verwende 9) und § 72 a oder § 61, 12.)

11) Wenn auf den Seiten eines Dreiecks drei Punkte so liegen, dass das Product ihrer Abstandsverhältnisse von den Ecken des Dreiecks dem negativen Werthe der Einheit gleich ist, so gehen diejenigen Geraden, welche diese Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken verbinden, durch einen Punkt.

12) Wenn man irgend einen von den drei Punkten  $a, a', a''$  in Aufgabe 10 mit dem zugehörigen 4. harmonischen Punkte vertauscht, so liegt dieser mit den beiden übrigen auf einer Geraden.

13) Wenn man irgend einen von den drei Punkten  $a', b', c'$  in § 72 a mit dem zugehörigen vierten harmonischen vertauscht und diesen, sowie die beiden übrigen Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks durch Gerade verbindet, so gehen diese letzteren durch einen Punkt.

14) Wenn man die drei Punkte  $a', b', c'$  in § 72 a mit den zugehörigen vierten harmonischen Punkten vertauscht und diese letzteren mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks durch Gerade verbindet, so gehen diese durch einen Punkt.

15) Man soll den Lehrsatz § 66  $\alpha$  durch 72  $\beta$  beweisen.

16) Eine Seite des Dreiecks wird durch die zugehörige Höhe und die Verbindungslinie der Fusspunkte der beiden andern Höhen harmonisch getheilt.

17) Diejenigen Geraden, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Berührungspunkten der Kreise verbinden, welche den gegenüberliegenden Seiten anbeschrieben sind, schneiden sich in einem Punkte (§ 41, 28  $\gamma$ ).

18) Die drei Punkte, in welchen die Seiten eines Dreiecks durch



diejenigen Geraden geschnitten werden, welche die Fusspunkte der Höhen paarweise verbinden, liegen auf einer Geraden.

19) Diejenigen Punkte, in welchen die Seiten eines Dreiecks von den Halbierungslinien der Aussenwinkel an den gegenüberliegenden Eckpunkten getroffen werden, liegen in einer Geraden.

20) Die Mittelpunkte der beiden Grundlinien eines Trapezes, der Schnittpunkt der Diagonalen und derjenige der nicht parallelen Seiten des Trapezes bilden eine harmonische Punktreihe.

21) In jedem vollständigen Vierseit theilen die Diagonalen einander harmonisch.

22) Zu drei Punkten den vierten harmonischen mit dem Lineale allein zu finden.

23) Es sind zwei Gerade  $A$  und  $B$  gegeben, welche nicht bis zu ihrem Schnittpunkte verlängert werden können. Man soll durch einen Punkt  $m$  eine Gerade so ziehen, dass sie nach dem Schnittpunkt von  $A$  und  $B$  gerichtet ist.

Andeutung. Man nehme auf  $A$  die Punkte  $a$  und  $b$  beliebig an und ziehe die Geraden  $am$  und  $bm$ , welche  $B$  in  $c$  und  $d$  treffen. Verlängere  $ad$  und  $bc$  bis zu ihrem Schnitt und theile diese Seiten des vollständigen Vierecks harmonisch.

24) Von zwei Punkten  $a$  und  $b$  ist nur der eine zugänglich und ausserdem liegt zwischen beiden ein Hinderniss, so dass nach der Richtung  $ab$  nicht visirt werden kann. Man soll einen Punkt in der Verlängerung von  $ab$  bestimmen (ohne andere Apparate als Messlatten und Stäbe).

Andeutung. Man wähle auf passende Weise zwei Punkte  $c$  und  $d$ , welche mit  $a$  und  $b$  ein vollständiges Viereck bestimmen. Ein Nebeneck desselben liegt auf  $ab$  und wird gefunden, indem man eine durch ein zweites Nebeneck gehende Seite harmonisch theilt und den erhaltenen Punkt mit dem dritten Nebeneck verbindet. Diese Gerade schneidet sich mit  $cd$  in dem gesuchten Punkte.

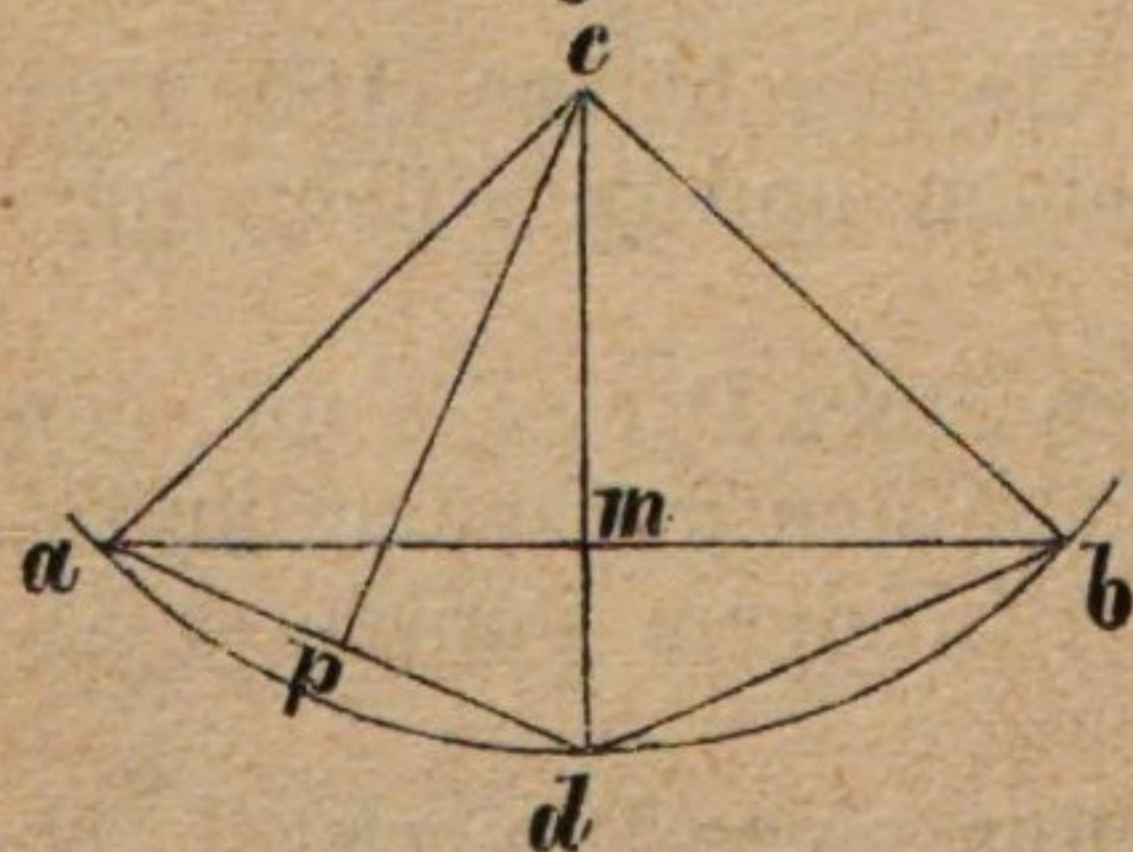
### III. Abschnitt.

#### Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser.

#### Ausmessung des Kreises.

#### § 74. Aufgaben zur Berechnung regelmässiger Vielecke.

Fig. 90.



Im Folgenden sei  $ab$  (Fig. 90) die Seite ( $s$ ) eines dem Kreise mit dem Radius  $ca = cb$  ( $r$ ) einbeschriebenen  $n$ -Ecks. Der kleine Radius ( $\rho$ ) dieses Vielecks sei  $cm$ . Die Verlängerung des kleinen Radius bestimmt die Seite ( $s'$ )  $ad = db$  des einbe-



schriebenen  $2n$ -Ecks, dessen kleiner Radius ( $\varrho'$ ) die Strecke  $cp$  ist.

a) Eine Formel zwischen dem grossen und kleinen Radius des eingeschriebenen  $n$ -Ecks und der Seite des letzteren zu finden.

$\alpha$ ) Eine Formel zwischen dem grossen und kleinen Radius des eingeschriebenen  $n$ -Ecks und der Seite des eingeschriebenen  $2n$ -Ecks zu finden.

#### Auflösung.

$$\begin{aligned} \text{I. } r^2 &= \varrho^2 + \frac{s^2}{4} \\ \text{II. } s &= 2 \sqrt{r^2 - \varrho^2} \\ \text{III. } \varrho &= \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \end{aligned}$$

Die Formel I. findet man aus dem rechtwinkligen Dreieck  $bmc$ , wenn man das Quadrat der Hypotenuse nach dem Pythagoreischen Lehrsatz bestimmt.

b) Die Seite des eingeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks durch den grossen Radius und die Seite des eingeschriebenen  $2n$ -Ecks zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \text{I. } s'^2 &= 2r^2 - 2r\varrho \\ \text{II. } s' &= \sqrt{2r(r - \varrho)} \\ \text{III. } \varrho &= r - \frac{s'^2}{2r} \end{aligned}$$

Die Formel I. findet man aus dem Dreieck  $dcb$ , wenn man das Quadrat der Seite  $db$  nach dem erweiterten Pythagoreischen Lehrsatz (§ 60 a) bestimmt.

$\beta$ ) Die Seite des eingeschriebenen regelmässigen  $2n$ -Ecks durch den grossen Radius und die Seite des eingeschriebenen  $n$ -Ecks zu bestimmen.

#### Auflösung:

$$s = \frac{2s'}{r} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{s'^2}{4}}$$

Man findet diesen Ausdruck durch Einsetzen des Werthes von  $\varrho$  aus  $\alpha$ , III in die Gleichung a, II.

$$s' = \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

Man findet diesen Ausdruck durch Einsetzen des Werthes von  $\varrho$  aus a, III in die Gleichung  $\alpha$ , I.

Die folgenden beiden Aufgaben bieten ein zweckmässiges Mittel, den Umring des eingeschriebenen regelmässigen  $2n$ -Ecks aus dem Umring des eingeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks und dem grossen Radius zu berechnen.

c) Den kleinen Radius des eingeschriebenen regelmässigen  $2n$ -Ecks aus dem grossen und kleinen Radius des

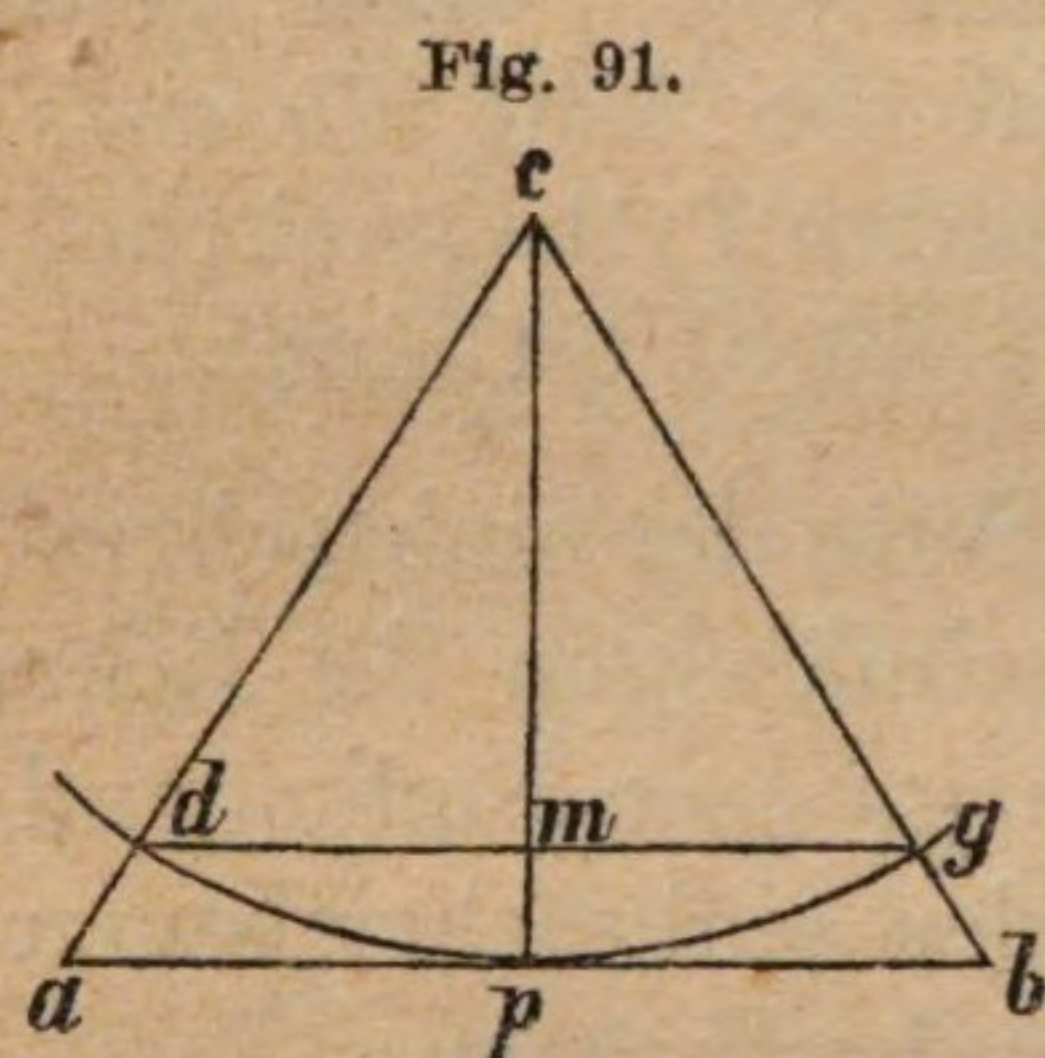
$\gamma$ ) Die Seite oder den Umring des eingeschriebenen regelmässigen  $2n$ -Ecks aus der Seite oder dem Umring des



einbeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks zu berechnen.

$$\text{I. } \varrho' = \sqrt{\frac{r \cdot (r + \varrho)}{2}}$$

Man erhält diese Formel, indem man die Gleichung a, III für den kleinen Radius des  $2n$ -Ecks hinschreibt:  $\varrho' = \sqrt{r^2 - \frac{s'^2}{4}}$  und den Werth für  $s'^2$  aus  $\alpha$ , I in diese Gleichung einsetzt.



d) Eine Formel zwischen den Seiten oder den Umringen des ein- und umbeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks zu finden.

$$\text{I. } s : S = \varrho : r$$

$$\text{II. } u : U = \varrho : r.$$

Die Proportion I erhält man durch Anwendung des Satzes § 63 auf Fig. 91.

eingeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks und den Radien  $r$  und  $\varrho'$  zu berechnen.

$$\text{I. } \frac{s}{2} : s' = \varrho' : r$$

$$\text{II. } u : u' = \varrho' : r.$$

Man erhält die Formel I, indem man den doppelten Inhalt des Dreiecks  $adc$  unter den beiden Formen  $\overline{ad} \cdot \overline{pc}$  und  $\overline{dc} \cdot \overline{am}$  ausdrückt und die daraus sich ergebende Gleichung in eine Proportion verwandelt. II ergibt sich, indem man die Glieder des ersten Verhältnisses in I mit  $2n$  multiplicirt.

Wenn  $dg$  (Fig. 91) die Seite des einbeschriebenen  $n$ -Ecks und  $p$  der Schnittpunkt des Kreises mit der Verlängerung des kleinen Radius  $cm$  ( $\varrho$ ) ist, so wird auf der Tangente von  $p$  durch ihre Schnittpunkte mit den Verlängerungen von  $cd$  und  $cg$  die Seite  $ab$  ( $S$ ) des umbeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks begrenzt (§ 40,  $\gamma$ ).

d) Die Seite des umbeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks durch die Seite des einbeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks und den grossen Radius auszudrücken.

$$S = \frac{s \cdot r}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}$$

Diesen Ausdruck erhält man durch Einsetzen des Werthes von  $\varrho$  aus a, III in den aus d, I erhaltenen Werth von  $S$ .

e) Die Seite des regelmässigen Dreiecks, Sechsecks, Vierecks durch den grossen Radius auszudrücken.



## Auflösung.

I. Die Seite des regelmässigen Sechsecks ist dem grossen Radius gleich.

II. Die Seite des regelmässigen Dreiecks ist  $r\sqrt{3}$ .

III. Die Seite des regelmässigen Vierecks ist  $r\sqrt{2}$ .

I. folgt daraus, dass der Centriwinkel des regelmässigen Sechsecks  $60^\circ$  beträgt und daher die Seite desselben mit den Radien nach ihren Endpunkten ein gleichseitiges Dreieck bildet.

II. Die Seite des regelmässigen Dreiecks wird erhalten, wenn man den ersten und dritten Eckpunkt des regelmässigen Sechsecks durch eine Strecke verbindet. Dieselbe bildet mit der angrenzenden Seckseckseite ein rechtwinkliges Dreieck (§ 36 d) und die Behauptung ergibt sich aus § 53  $\alpha$ .

III. Der Beweis ist darin gelegen, dass die Seite des regelmässigen Vierecks mit den Radien nach ihren Endpunkten ein rechtwinkliges Dreieck bildet.

f) Aus der Seite des regelmässigen Sechsecks soll die Seite des regelmässigen  $12 = ,24 = ,48 = \dots$  Ecks abgeleitet werden.

## Auflösung:

$$S_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$S_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$S_{48} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

Diese Formeln ergeben sich durch mehrmalige Anwendung von  $\beta$ ).

Auf dieselbe Weise können die Seiten aller Vielecke von der Seitenzahl  $6 \cdot 2^n$  bezeichnet werden.

Eine analoge Reihe entsteht, wenn man von dem regelmässigen Viereck ausgeht.

Die Peripherie als Grenzwert des Umrings regelmässiger § 75. Vielecke.

a) Die Länge der Peripherie des Kreises ist der gemeinsame Grenzwert, welchem sich der Umring aller ein- oder umbeschriebenen regelmässigen Vielecke nähert, wenn ihre Seitenzahl bis ins Unbegrenzte zunimmt.

Beweis. Nach § 43, d und  $\delta$  ist die Kreisperipherie grösser als der Umrang  $u$  des einbeschriebenen  $n$ -Ecks und kleiner



als der Umring  $U$  des umbeschriebenen  $n$ -Ecks. Nach Aufgabe § 74 d, II gilt nun die Proportion

$$U : u = r : \varrho \text{ oder } U - u : u = r - \varrho : \varrho; \quad U - u = u \cdot \frac{r - \varrho}{\varrho}$$

Setzt man hier aus § 74  $\alpha$ , III den Werth für  $\varrho$  ein, so erhält man

$$U - u = u \cdot \frac{s'^2}{2r \cdot \varrho}$$

wo  $s'$  die Seite des einbeschriebenen  $2n$ -Ecks bedeutet. Wenn nun die Seitenzahl  $n$  ins Unbegrenzte wächst, so wird  $s'$  und damit auch der Unterschied  $U - u$  verschwinden. Da aber die Länge der Peripherie zwischen  $U$  und  $u$  eingeschlossen ist, so muss dieselbe mit dem gemeinschaftlichen Grenzwert von  $U$  und  $u$  zusammenfallen.

**b)** Die Fläche eines Kreises ist gleich der Hälfte des Products von Peripherie und Radius.

Der Beweis folgt unmittelbar aus § 56 f und § 75 a.

**c)** Das Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser hat für alle Kreise denselben Werth.

Beweis. (Man benutze Fig. 91, ohne vorauszusetzen, dass der Bogen  $dpg$  die Gerade  $ab$  berühre.)  $cd = cg = r$  seien Radien eines Kreises und  $dg$  die Seite des einbeschriebenen  $n$ -Ecks, deren Länge mit  $s$  bezeichnet sein soll.  $ca$  und  $cb$  seien Radien eines anderen Kreises und ihre Länge sei mit  $R$  bezeichnet. Dann ist  $ab$  die Seite  $S$  des diesem zweiten Kreise einbeschriebenen  $n$ -Ecks und die Seiten  $dg$  und  $ab$  sind parallel (§ 63  $\alpha$ .) Daher hat man

$$S : s = R : r,$$

oder durch Multiplication der Glieder des ersten Verhältnisses mit  $n$ :

$$U : u = R : r; \quad U : R = u : r; \quad U : 2R = u : 2r.$$

Diese Proportionen gelten nach a) auch, wenn man  $U$  und  $u$  die Peripherien der beiden Kreise bedeuten lässt. Durch die letzte Proportion ist alsdann der Lehrsatz bewiesen, weil  $2R$  und  $2r$  die Durchmesser der Kreise sind.

**d)** Wenn das constante Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser mit  $\pi$  bezeichnet wird und der Radius eines Kreises die Länge  $r$  hat, so ist seine Peripherie durch  $2\pi r$  ausgedrückt.

Beweis. Wird die Länge der Peripherie dieses Kreises mit  $p$  bezeichnet, so ist nach c)  $p : 2r = \pi$  oder  $p = 2\pi \cdot r$ .

Zusatz: Die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser 1 oder dessen Radius  $\frac{1}{2}$  ist, beträgt  $\pi$  Längeneinheiten.



Berechnung von  $\pi$ .

§ 76.

$\pi$  ist die Hälfte von der Peripherie eines Kreises, dessen Radius 1 ist. Um  $\pi$  zu berechnen gehe man von dem halben Umring des in diesen Kreis beschriebenen regelmässigen Sechsecks aus, welcher den Werth 3 hat. Der kleine Radius des Sechsecks hat den Werth 0,866025 (§ 74 c, e).

Man benutze nun die Formeln (§ 74 c, I und  $\gamma$ , II).

$$\varrho' = \sqrt{\frac{r(r + \varrho)}{2}}$$

$$u' = \frac{r \cdot u}{\varrho'}$$

In demselben setze man  $r = 1$  und bemerke, dass die zweite Gleichung auch dann gilt, wenn man unter  $u$  und  $u'$  die Hälfte der Umringe des regelmässigen einbeschriebenen  $n$ -Ecks und  $2n$ -Ecks versteht.

Durch diese Gleichungen

$$\varrho' = \sqrt{\frac{1 + \varrho}{2}}; \quad u' = \frac{u}{\varrho'}$$

kann man zunächst den kleinen Radius und den halben Umring des Zwölfecks berechnen, ( $\varrho = 0,866 \dots, u = 3$ ). Sodann kann man auf dieselbe Weise zu dem halben Umring des 24-Ecks, 48-Ecks, 96-Ecks fortschreiten, um dem Grenzwert  $\pi$  des halben Umrings der eingeschriebenen regelmässigen Vielecke sich zu nähern.

Ueber die Zahl der sichern Stellen in der Quadratwurzel einer unvollständigen Zahl mit  $n$  Klassen, deren letzte vollständig ist ( $2n$  oder  $2n - 1$  sichere Stellen, je nachdem die 1te geltende Klasse  $> < 25$ ), siehe H. T. Müller, Allgemeine Arithmetik. Halle 1855.

Die algebraische Analysis bietet bequeme Mittel zur Berechnung der Zahl  $\pi$ , die jedoch nicht in das Gebiet dieses Buches gehören.

Archimedes (250 v. Chr.) berechnete die Zahl  $\pi$  aus dem Umringe des regelmässigen 96-Ecks und erhielt den Werth 22 : 7 oder 3,1428 .... Ein anderes Verhältniss 355 : 113 ist von Adrian Antonisse (Metius), einem holländischen Landmesser, um 1550 berechnet worden.  $\pi$  ist jedoch eine Irrationalzahl, d. h. eine Zahl, welche durch keinen Bruch vollständig genau angegeben werden kann. Sie heisst auch die Ludolph'sche Zahl, weil Ludolph von Ceulen sie auf 35 Stellen genau berechnete (17. Jahrhundert). Prof. Richter in Elbing berechnete die Zahl  $\pi$  auf 500 Decimalstellen.

$$\pi = 3,14159265 \dots$$

Es folgt noch eine Tabelle mit 5 Rubriken.

Die Ueberschriften  $n$ ,  $\varrho$ ,  $U$ ,  $u$ ,  $d$  bezeichnen nach einander



die Seitenzahl der regelmässigen Vielecke, den kleinen Radius des einbeschriebenen Vielecks, den halben Umring des umbeschriebenen, den halben Umring des eingeschriebenen Vielecks und die Differenz dieser halben Umringe.

| $n$ | $\varrho$ | $U$      | $u$      | $d$      |
|-----|-----------|----------|----------|----------|
| 6   | 0,866025  | 3,464101 | 3,000000 | 0,464101 |
| 12  | 0,965926  | 3,215390 | 3,105828 | 0,109562 |
| 24  | 0,991445  | 3,159660 | 3,132628 | 0,027032 |
| 48  | 0,997859  | 3,146086 | 3,139350 | 0,006736 |
| 96  | 0,999464  | 3,142714 | 3,141032 | 0,001682 |

### § 77. Aufgaben zur Berechnung des Kreises.

Aufgaben.

a) Die Fläche des Kreises durch  $\pi$  und den Radius auszudrücken.

Auflösung. Nach § 75 b und d ist die Fläche des Kreises  $\pi \cdot r^2$ .

b) Wenn der Radius eines Kreises die Länge  $r$  hat, so soll der Bogen berechnet werden, welcher von dem Centriwinkel von  $\alpha^\circ$  überspannt wird.

Auflösung. Nach § 36 b geschieht dies durch die Proportion

$$x : 2\pi r = \alpha : 360$$

$$x = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360} = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}$$

c) Wenn der Radius eines Kreises die Länge  $r$  hat, so soll die Fläche des Sectors bestimmt werden, welcher von dem Centriwinkel von  $\alpha^\circ$  eingeschlossen wird.

Auflösung. Dieselbe wird erhalten, indem man die Länge des Bogens, welcher von dem Centriwinkel  $\alpha$  überspannt wird, mit der Hälfte des Radius multiplicirt.

$$F = \frac{\pi r \cdot \alpha}{180} \cdot \frac{r}{2} = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360}$$

d) Die Fläche eines zwischen zwei concentrischen Kreisen mit den Radien  $R$  und  $r$  gelegenen Ringes zu berechnen.

Auflösung.  $F = \pi (R^2 - r^2)$ .

e) In demselben Ringe die Fläche des durch zwei Radien gebildeten Ausschnitts zu bestimmen, wenn die Radien den Winkel  $\alpha$  einschliessen.

Auflösung.  $F = \pi (R^2 - r^2) \cdot \frac{\alpha}{360}$



## Uebungen.

## § 78.

1) Die Seite des umbeschriebenen regelmässigen Dreiecks ist doppelt so gross als die Seite des einbeschriebenen.

2) Die Diagonalen des regelmässigen Sechsecks theilen einander nach dem Verhältniss 1 : 3.

3) Die Fläche des einbeschriebenen regelmässigen 6-Ecks ist  $\alpha$ ) das Doppelte von der Fläche des einbeschriebenen regelmässigen Dreiecks,  $\beta$ )  $\frac{3}{4}$  von der Fläche des umbeschriebenen regelmässigen 6-Ecks und  $\gamma$ ) die Hälfte von der Fläche des umbeschriebenen regelmässigen Dreiecks.

4) Wenn  $s$  die Seite des einbeschriebenen regelmässigen  $n$ -Ecks ist, so ist die Fläche des  $2n$ -Ecks  $\frac{n \cdot s \cdot r}{2}$

5) Wenn der Radius = 1 ist, so soll man bis auf 0,001 genau die Seite des einbeschriebenen Dreiecks, Vierecks, Achtecks, Zwölfecks berechnen.

6) Die Flächen des einbeschriebenen regelmässigen Sechsecks, Achtecks, Zwölfecks als Functionen des grossen Radius zu berechnen.

7) Die Fläche des regelmässigen Zwölfecks ist dreimal so gross als das Quadrat des grossen Radius.

8) Wenn der Radius eines Kreises  $2,74^m$  ist, wie gross ist die Peripherie auf  $0,01^m$  genau.

9) Die Länge des Erdmeridians ist 40000000 Meter. Man soll den Radius der Erde bis auf 1 Meter genau finden.

10) Man soll bis auf  $0,01^m$  genau den Durchmesser eines Kreises finden, dessen Umfang  $542,864^m$  ist.

11) Man soll bis auf 0,01 genau den Durchmesser eines Kreises finden, wenn ein Bogen von  $52^\circ 24' 32''$  eine Länge von 26,042 Meter hat.

12) Man soll die Anzahl der Grade, Minuten und Secunden des Bogens finden, welcher dem Durchmesser gleich ist.

13) Die Fläche eines Ringes ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser derjenigen Sehne des äussern Kreises gleich ist, welche der innere Kreis berührt.

14) Ein kreisförmiger Platz von  $75^m$  Durchmesser wird mit Steinen von  $25^{cm}$  Länge und  $2^{cm}$  Breite gepflastert, von denen jeder 4 Groschen kostet. Wie viel kostet das Pflaster?

15) Die Länge eines Bogens von  $60^\circ$  ist  $140^m$ . Wie gross ist die Fläche des zugehörigen Sectors?

16) Den Radius eines Kreises zu berechnen, wenn der zu einem Bogen von  $36^\circ$  gehörige Sector eine Fläche von 400 Quadratmeter hat.

17) Die Fläche eines Segments zu berechnen, dessen Sehne 100,24 Meter und dessen Bogen  $60^\circ$  beträgt.



## Fünfter Cursus.

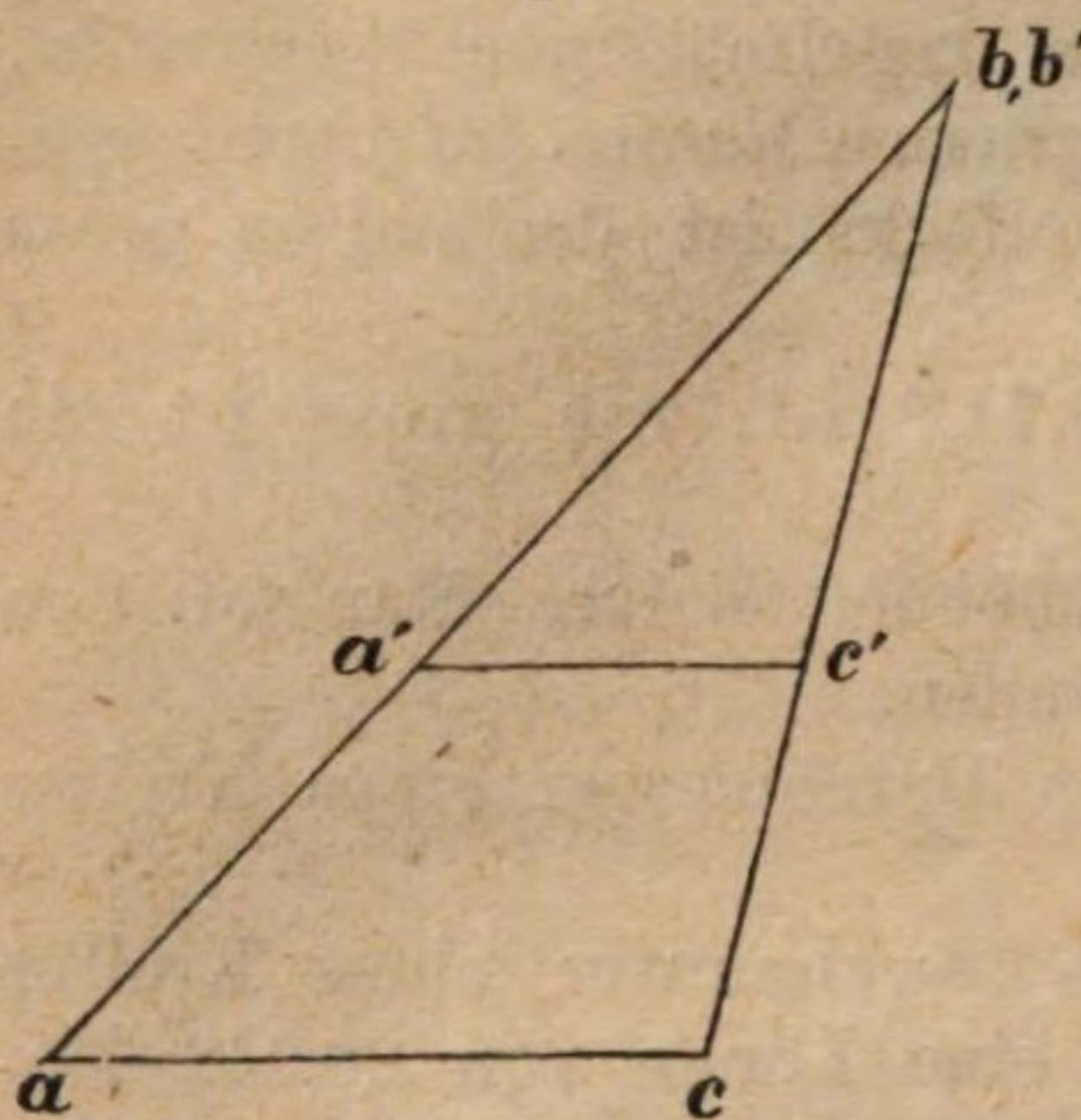
### I. Abschnitt.

#### Aehnlichkeit der Dreiecke. Anwendungen derselben.

##### § 79. Definition ähnlicher Dreiecke.

a) Wenn die Winkel zweier Dreiecke entsprechend gleich sind, so bilden die entsprechenden Seiten gleiche Verhältnisse.

Fig. 92.



Beweis (Fig. 92.) Wenn in zwei Dreiecken  $abc$ ,  $a'b'c'$  die Winkel  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bezüglich den Winkeln  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  gleich sind, und man die Dreiecke so legt, dass die Winkel bei  $b$  und  $b'$  sich decken, so ist  $a'c'$  nach § 9 b parallel mit  $ac$  und man hat (§ 63 a)

$$ab : a'b' = bc : b'c' = ca : c'a'.*)$$

b) Erklärung. Wenn in zwei Dreiecken die Winkel entsprechend gleich sind und deshalb die entsprechenden Seiten gleiche Verhältnisse bilden, so nennt man die Dreiecke ähnlich (S).

##### § 80. Bedingungen für die Aehnlichkeit von Dreiecken.

a) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Winkel entsprechend gleich haben.

\*) Anmerkung. Wenn man in jeder der 3 Proportionen, welche in der oben stehenden fortlaufenden Proportion enthalten sind, die mittleren Glieder vertauscht, so erhält man drei neue Proportionen, aus welchen man sieht, dass sich zwei Seiten des einen Dreiecks wie die entsprechenden Seiten des andern verhalten. Wenn man den gemeinsamen Werth der drei Verhältnisse, welche in der obigen fortlaufenden Proportion gleich gesetzt sind, durch  $m$  ausdrückt und in den so entstandenen Gleichungen die Nenner fortschafft, so erhält man drei neue Gleichungen

$$\overline{ab} = m \cdot \overline{a'b'}, \quad \overline{ac} = m \cdot \overline{a'c'}, \quad \overline{bc} = m \cdot \overline{b'c'},$$

das heisst:

Die drei Seiten des einen Dreiecks sind gleichvielmals grösser oder kleiner als die entsprechenden Seiten des andern Dreiecks.



Beweis. Derselbe folgt aus § 12 a und § 79 b.

b) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie das Verhältniss zweier Seiten und den eingeschlossenen Winkel entsprechend gleich haben.

Beweis. Wenn man unter der Voraussetzung  $ba:bc = b'a':b'c'$  oder  $ba:b'a' = bc:b'c'$  und  $\angle b = \angle b'$  die Stücke  $bf$  und  $bd$  bezüglich den Seiten  $b'a'$  und  $b'c'$  gleich macht, so folgt

1) der Parallelismus von  $fd$  und  $ac$  aus § 63  $\alpha$ , und somit nach a) die Aehnlichkeit der Dreiecke  $abc$  und  $abd$ ;

2) die Congruenz von  $bfd$  und  $b'a'c'$  nach § 17 a.

Aus 1) und 2) folgt aber die Behauptung.

c) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie die Verhältnisse der drei Seiten gleich haben.

Beweis. Wenn man unter der Voraussetzung,  $ab:bc:ca = a'b':b'c':c'a'$  oder  $ba:b'a' = bc:b'c' = ac:a'c'$  die Stücke  $bf$  und  $bd$  bezüglich  $b'a'$  und  $b'c'$  gleich macht, so folgt

1) die Aehnlichkeit von  $abc$  und  $abd$  wie oben.

2) Aus den Proportionen

$$ba:b'a' = ac:a'c'$$

$$ba:bf = ac:fd$$

und der Gleichheit von  $b'a'$  und  $bf$  folgt die Gleichheit von  $a'c'$  und  $fd$ . Die Dreiecke  $bfd$  und  $b'a'c'$  sind somit congruent (§ 21 a).

Aus 1) und 2) ergibt sich die Behauptung.

d) Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie das Verhältniss zweier Seiten und den der grössern gegenüberliegenden Winkel entsprechend gleich haben.

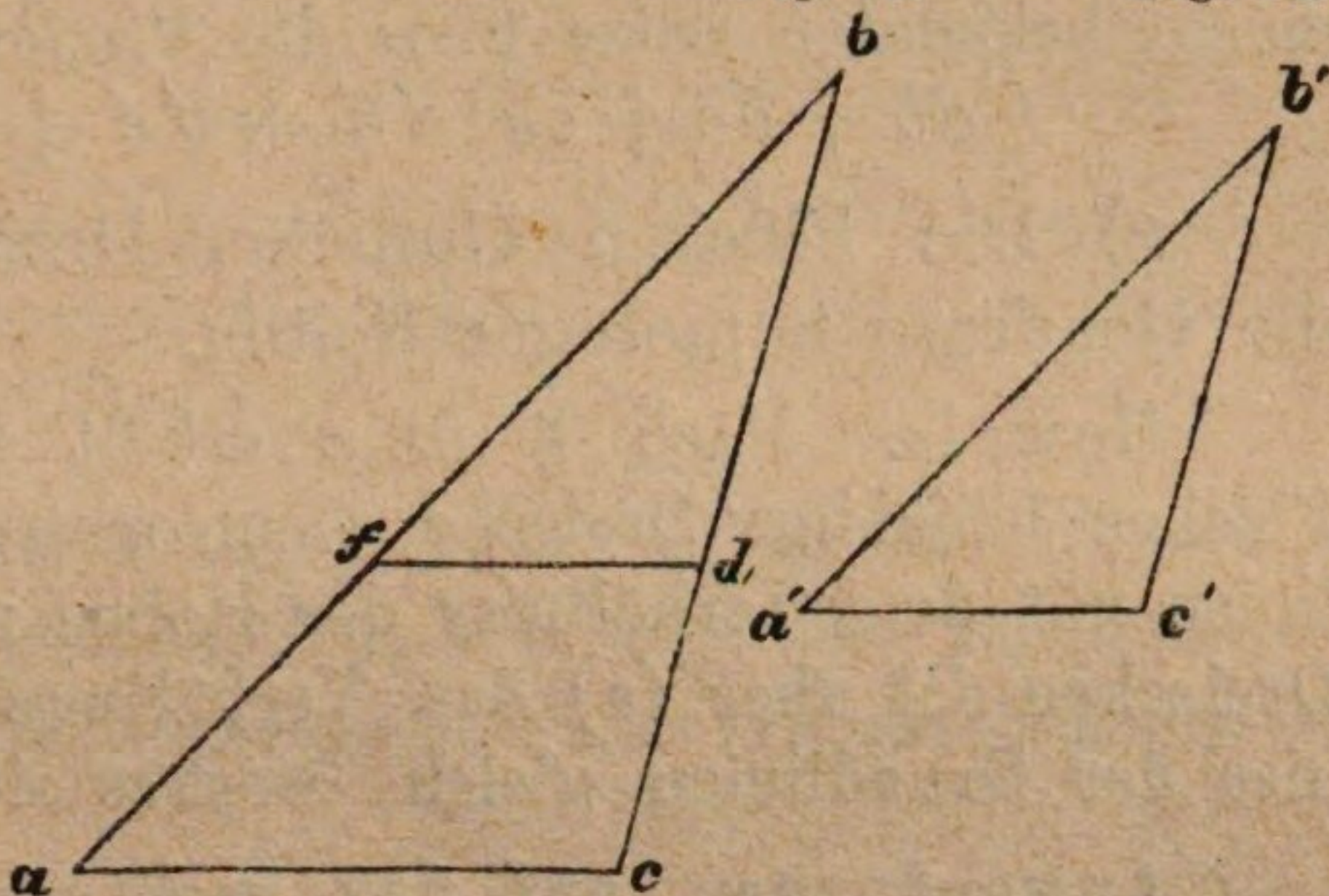
Beweis. Unter den Voraussetzungen,  $ba:bc = b'a':b'c'$  oder  $ba:b'a' = bc:b'c'$ ,  $ba > bc$  und  $\angle c = \angle c'$  verfähre man ganz wie bei b. Nur beweise man die Congruenz der Dreiecke  $bfd$  und  $b'a'c'$  nach § 21  $\alpha$  mit der Bemerkung, dass die Winkel bei  $d$  und  $c'$  einander gleich sein müssen, weil beide dem Winkel  $c$  gleich sind.

### Anwendungen.

a) Entsprechende Höhen ähnlicher Dreiecke stehen in dem Verhältniss entsprechender Seiten.

Fig. 93.

Fig. 94.





Beweis. Aehnliche Dreiecke werden durch homologe Höhen in rechtwinklige Dreiecke getheilt, welche wieder paarweise ähnlich sind, womit sich die Behauptung ergibt.

b) Die Umringe ähnlicher Dreiecke stehen in dem Verhältniss entsprechender Seiten.

Beweis. Wenn die Dreiecke  $abc$  und  $a'b'c'$  ähnlich sind, so folgt aus der Proportion  $ab:a'b' = bc:b'c' = ca:c'a'$  nach einem bekannten Satze über die Proportionen:

$$ab + bc + ca : a'b' + b'c' + c'a' = ab : a'b'.$$

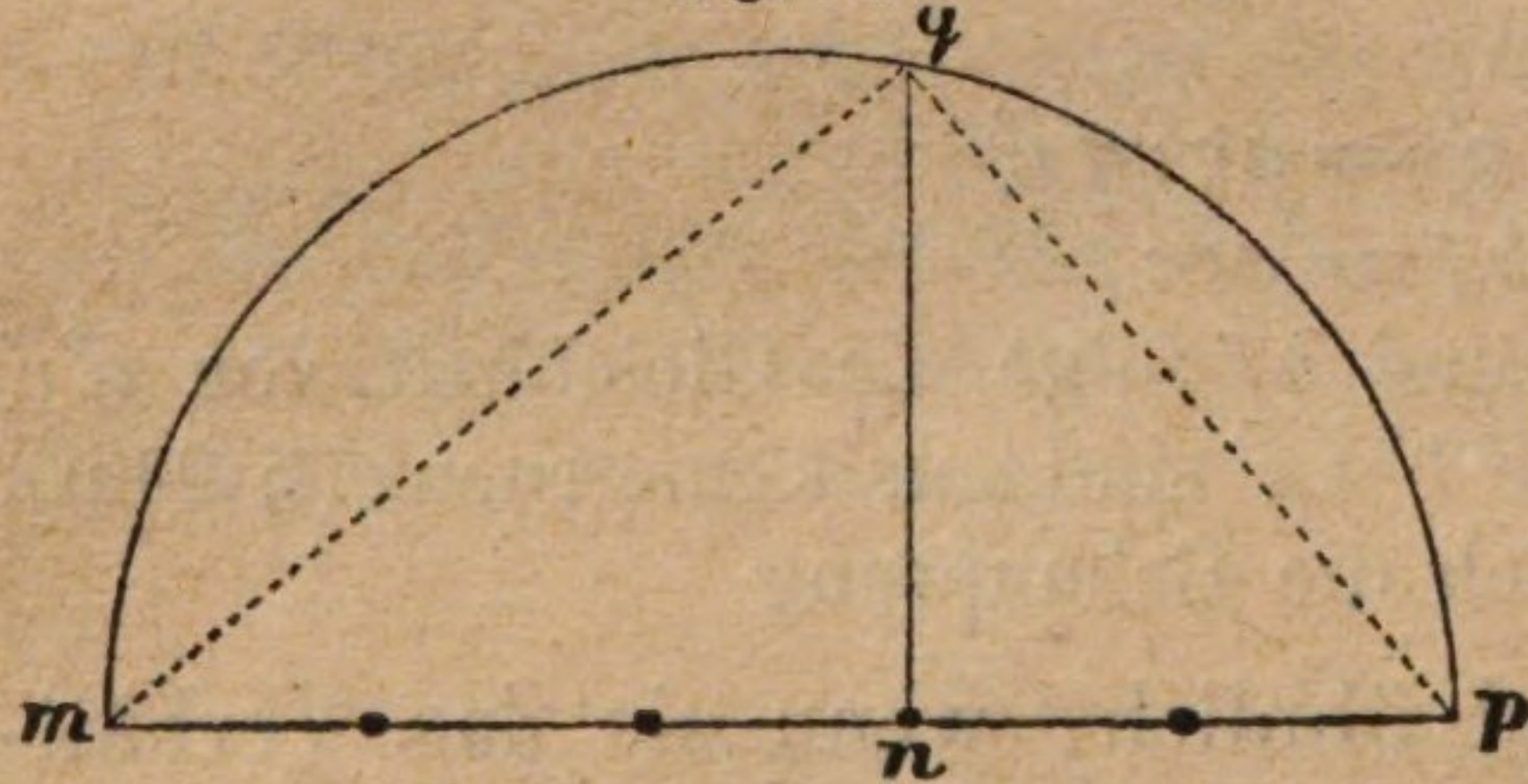
c) Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Beweis. Nach § 58 a erhält man das Verhältniss der Flächen beliebiger Dreiecke, wenn man das Verhältniss der Grundlinien mit dem Verhältniss der Höhen multiplicirt. Bei ähnlichen Dreiecken ist aber (a) das Verhältniss der Höhen dem Verhältniss der Grundlinien gleich, woraus sich die Behauptung ergibt.

## § 82. Anwendungen auf das rechtwinklige Dreieck. — Aufgaben.

a) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe zieht, so ist eine Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt. Die Höhe selbst ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Fig. 95.



(§ 80 a) und daher  $mn:nq = qn:np$ .

Beweis. Wenn  $qn$  die Höhe (Fig. 95) des rechtwinkligen Dreiecks  $mpq$  ist, so sind die Dreiecke  $mnq$  und  $nqp$  ähnlich (§ 80 a) und deshalb  $mp:nq = nq:np$ . Ferner sind die Dreiecke  $mnq$  und  $qnp$  ähnlich

b) Aufgabe. Zu zwei Strecken  $ab$  und  $cd$  (Fig. 96) die mittlere Proportionale zu suchen.

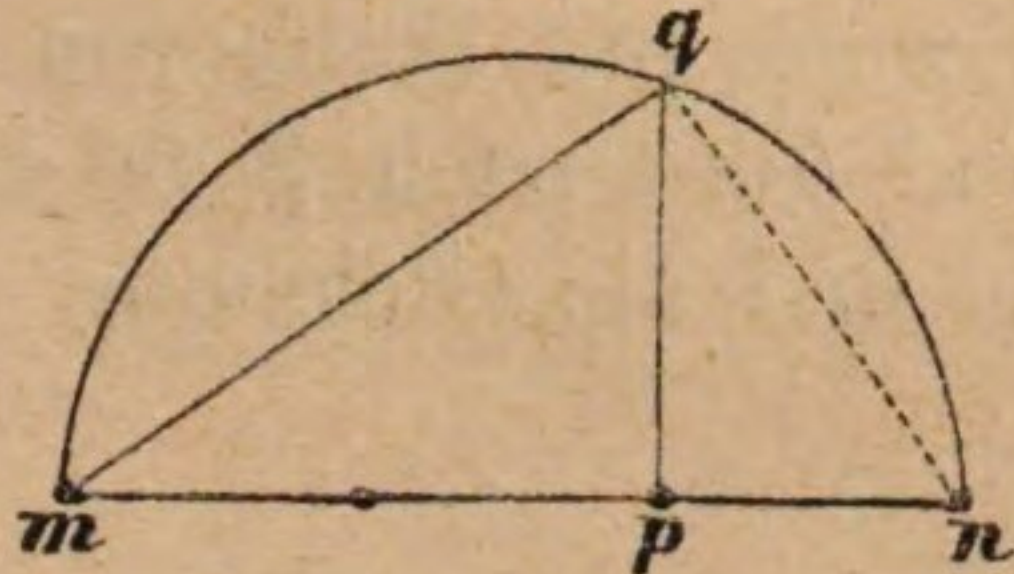
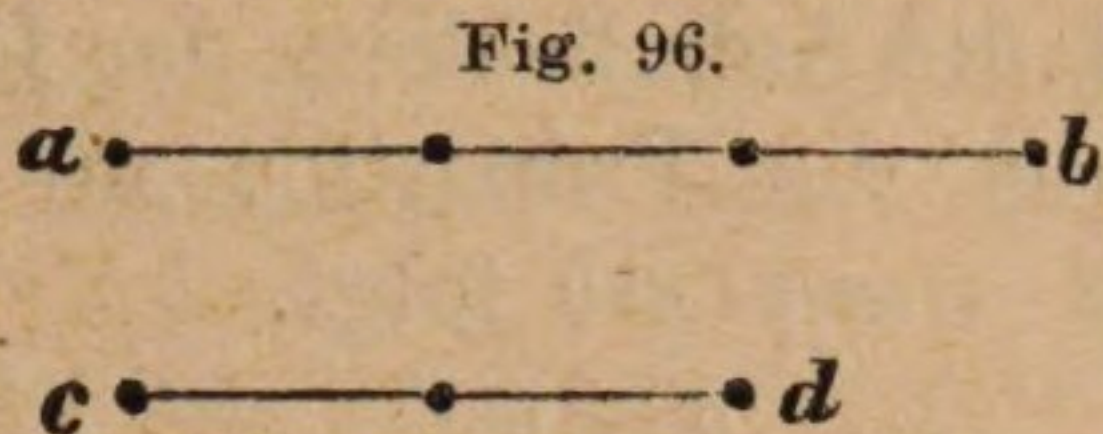
1. Auflösung: Man trage von einem Punkte  $n$  aus die gegebenen Strecken nach den entgegengesetzten Richtungen einer Geraden (Fig. 95).

Ueber der hierdurch erhaltenen Strecke als Durchmesser errichte man einen Halbkreis. Dann ist das in denselben fallende Stück  $nq$  einer in  $n$  errichteten Senkrechten die verlangte mittlere Proportionale.



2. Auflösung: Man trage von einem Punkte  $m$  (Fig. 97) einer Geraden aus die gegebenen Strecken nach der nämlichen Richtung auf dieser Geraden ab ( $mp = cd$ ,  $mn = ab$ ). Ueber  $mn$

Fig. 97.



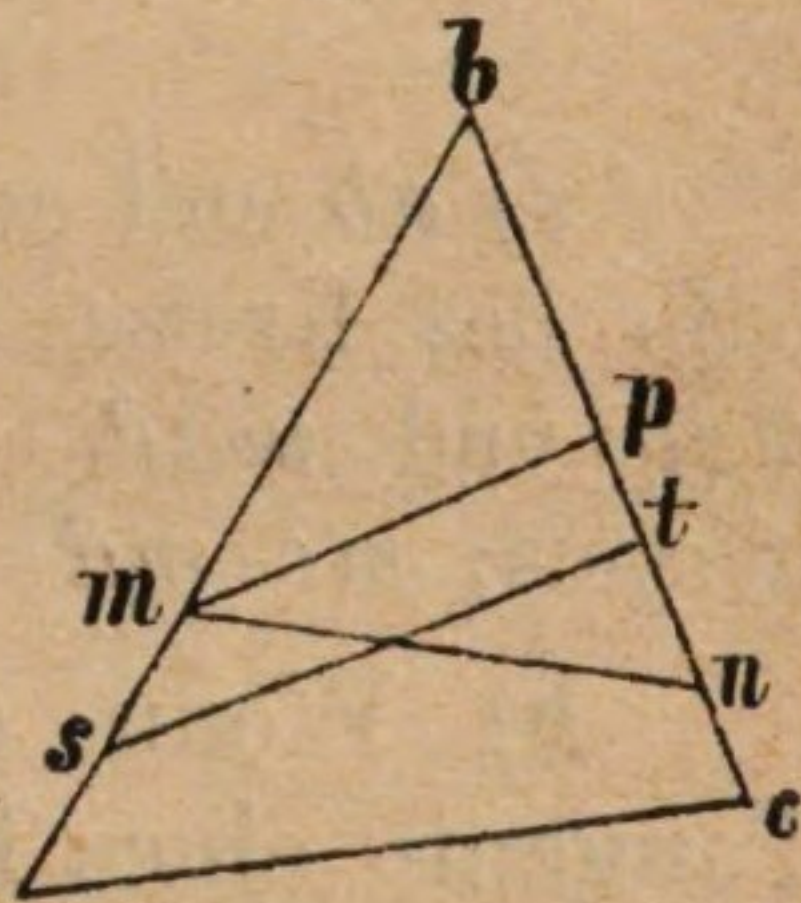
als Durchmesser errichte man einen Halbkreis. Wenn die in  $p$  auf  $mn$  errichtete Senkrechte denselben in  $q$  trifft, so ist  $mq$  die gesuchte mittlere Proportionale.

c) Aufgabe. Das Dreieck  $mbn$  (Fig. 98) in ein anderes zu verwandeln, welches den Winkel  $b$  mit jenem gemein hat, so dass die gegenüberliegende Seite mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

Auflösung: Ziehe  $mp$  mit der gegebenen Geraden parallel und mache  $bt$  gleich der mittleren geometrischen Proportionalen zwischen  $bn$  und  $bp$ . Wenn dann  $ts$  mit  $mp$  parallel gezogen wird, so ist  $bst$  das verlangte Dreieck.

Fig. 98.

Beweis. Aus  $bp:bt = bt:bn$  und  $bp:bt = bm:bs$  (§ 63 a) folgt:  $bt:bn = bm:bs$  und hieraus:  $bt \cdot bs = bn \cdot bm$ . Hiermit ist nach § 58 c die Behauptung bewiesen.



d) Aufgabe. Ein Dreieck  $D$  in ein anderes von gleicher Fläche zu verwandeln, welches mit einem gegebenen Dreieck  $D'$  ähnlich ist.

Auflösung. Man verwandle zuerst das Dreieck  $D$  in ein anderes, welches die gleiche Fläche und mit  $D'$  einen Winkel entsprechend gleich hat (§ 52  $\gamma$ ). Sodann lege man diese beiden Dreiecke mit den gleichen Winkeln auf einander und verfare nach c).

e) Aufgabe. Ein Dreieck durch eine Parallele mit der Grundlinie nach einem gegebenen Verhältniss zu theilen.

Auflösung. Man führe zuerst die verlangte Theilung von einem Endpunkte der Grundlinie aus und verfare sodann nach c)

### Anwendungen auf die Kreislehre.

§ 83.

a) Wenn man durch einen Punkt Secanten eines Kreises zieht, so hat das Product der durch diesen Punkt und den



Kreis begrenzten Abschnitte für jede Secante den gleichen Werth.

Beweis (Fig. 99). 1)  $ab$  und  $cd$  seien die Sehnen, welche auf zwei innerhalb des Kreises sich schneidenden Secanten liegen. Man beweise mit Hülfe von § 36 d die Aehnlichkeit der Dreiecke  $cma$  und  $bmd$  nach § 80 a, woraus die Proportion  $mc:mb = ma:md$  und die Gleichung  $mc \cdot md = ma \cdot mb$  folgt.

Fig. 99.

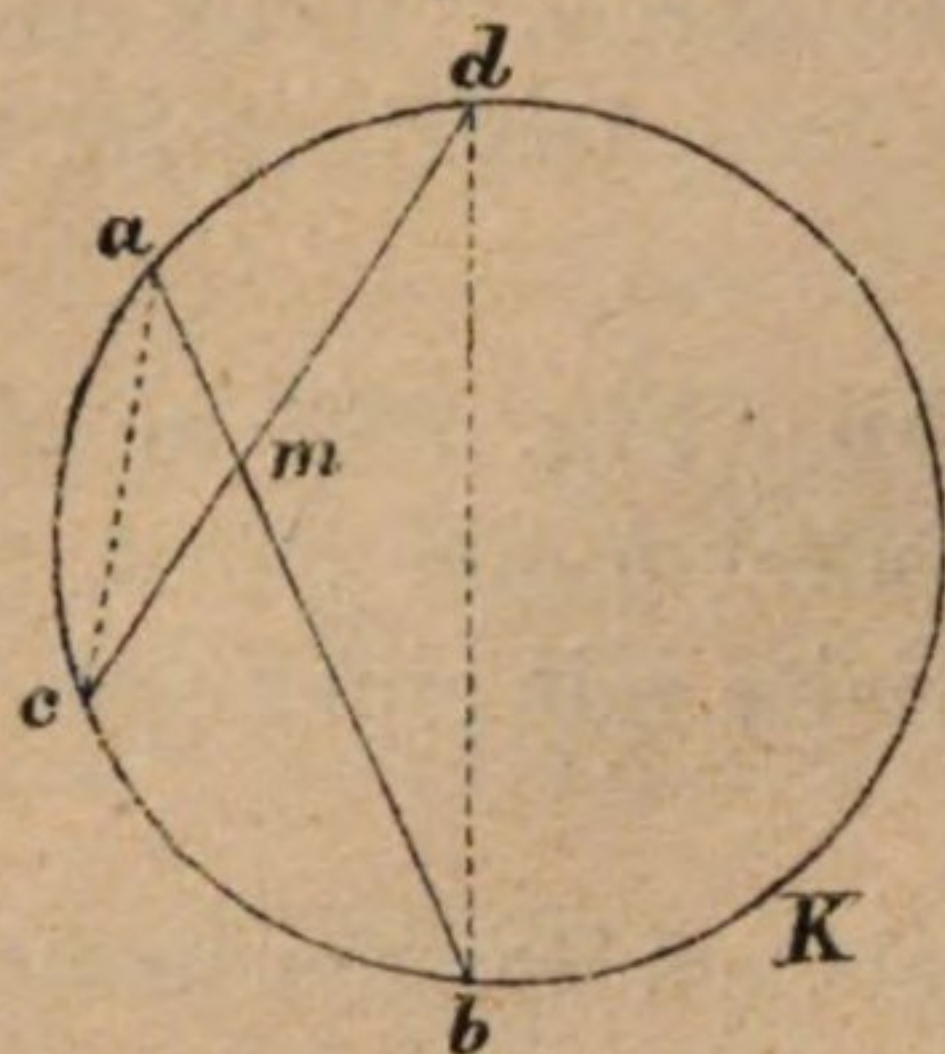
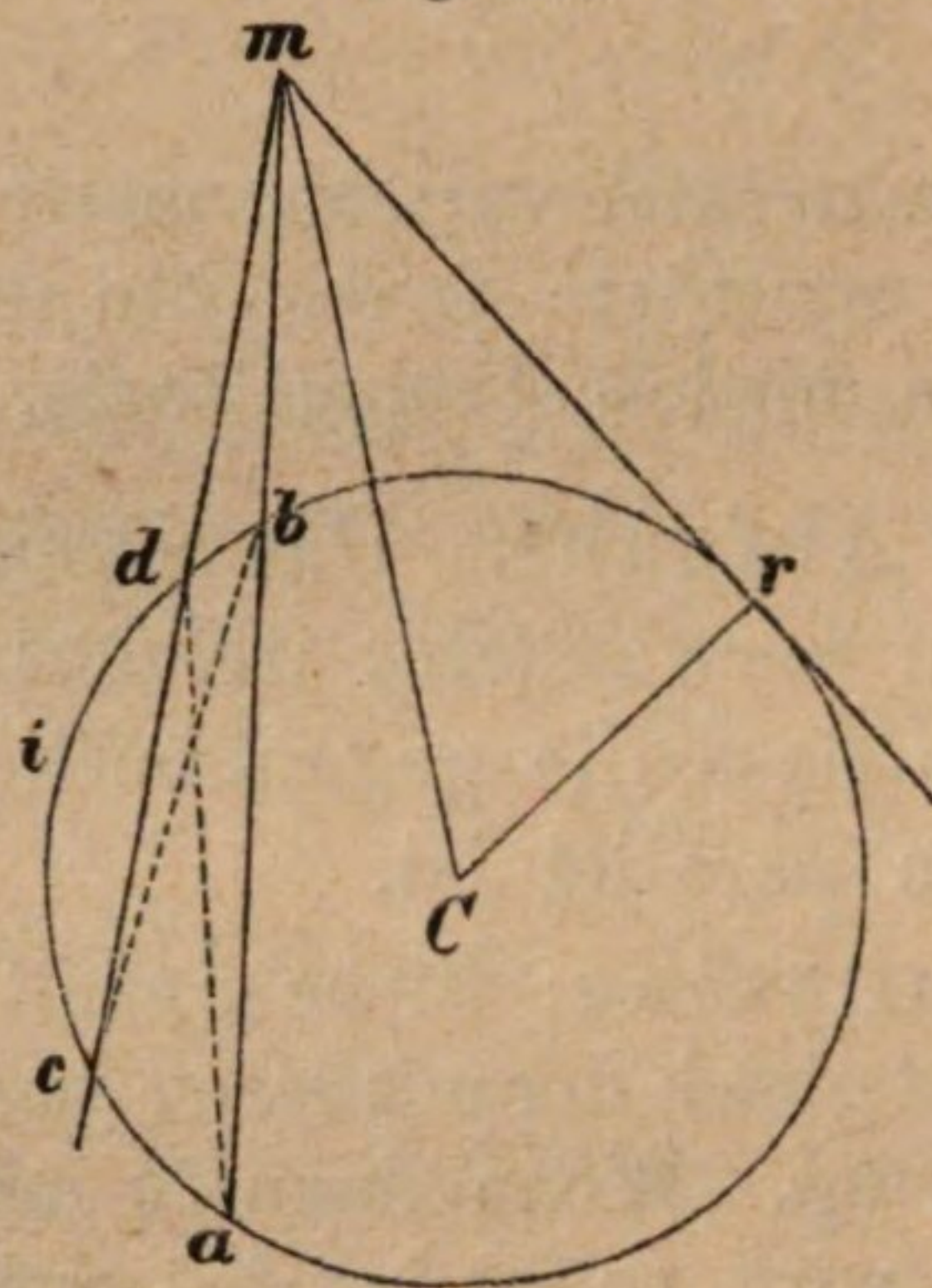


Fig. 100.



2)  $ab$  und  $cd$  (Fig. 100) seien zwei Secanten, die sich ausserhalb des Kreises schneiden. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $mcb$  und  $mad$  (§ 36 d, § 80 a) folgt:  $mc:ma = mb:md$  und hieraus:  $mc \cdot md = ma \cdot mb$ .

b) Wenn durch einen Punkt eine Secante und eine Tangente eines Kreises gezogen werden, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der Secante und ihrem äussern Abschnitt.

Beweis. Man denke in Fig. 100 die Strecken  $ar$  und  $br$  gezogen und beweise die Aehnlichkeit der Dreiecke  $arm$  und  $rbm$  (§ 36 e, § 80 a) woraus  $am:mr = rm:mb$  folgt.

Erklärung. Wenn man die Secantenabschnitte, von welchen in a) die Rede ist, von dem Schnittpunkte der Secanten aus durchlaufen denkt und nach § 62 die Vorzeichen der Abschnitte und ihrer Producte bestimmt, so werden diese Producte positiv oder negativ, je nachdem die Secanten sich ausserhalb oder innerhalb des Kreises schneiden.

Das in Grösse und Vorzeichen bestimmte Product der von einem Punkte  $m$  und einem Kreise  $K$  begrenzten Secantenabschnitte heisst die Potenz des Punktes  $m$  in Bezug auf

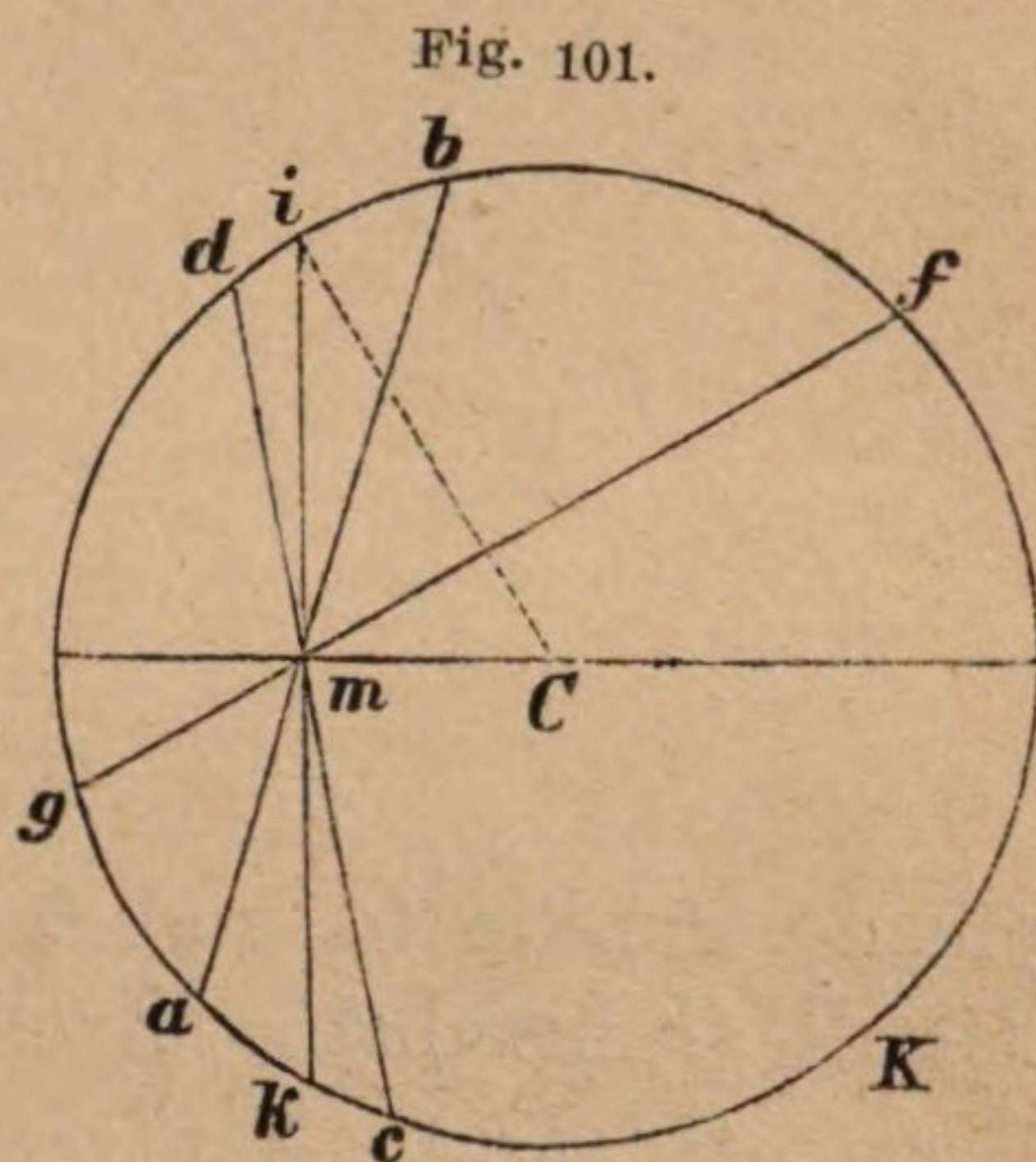


den Kreis. Dieselbe ist positiv oder negativ, je nachdem der Punkt vom Kreise aus- oder eingeschlossen ist.

c) Die Potenz eines Punktes  $m$  ist ihrem absoluten Werthe nach gleich dem Quadrate der halben kleinsten Sehne oder dem Quadrate der Tangente des Punktes  $m$ , je nachdem  $m$  von dem Kreise ein- oder ausgeschlossen ist.

Beweis 1) Wenn (Fig. 101)  $m$  von dem Kreise eingeschlossen ist, so sind die Abschnitte  $mi$  und  $mk$  der kleinsten Sehne gleich gross (§ 32, Anmerkung), daher hat man  $\overline{ma} \cdot \overline{mb} = \overline{mc} \cdot \overline{md} = \overline{mg} \cdot \overline{mf} = \overline{mk} \cdot \overline{mi} = \overline{mk}^2$ .

2) Wenn (Fig. 100)  $m$  von dem Kreise ausgeschlossen ist, so folgt aus b)  $\overline{ma} \cdot \overline{mb} = \overline{mc} \cdot \overline{md} = \overline{mr}^2$ .



d) Man erhält die Potenz eines Punktes  $m$  in Bezug auf den Kreis, wenn man das Quadrat des Radius von dem Quadrate der Entfernung des Punktes  $m$  vom Centrum abzieht.

Beweis. 1) Wenn  $m$  von dem Kreise eingeschlossen ist (Fig. 101), so ist nach der Erklärung und nach c) die Potenz durch  $-\overline{mi}^2 = -(iC^2 - mC^2) = \overline{mC}^2 - iC^2$  dargestellt, was zu beweisen war.

2) Wenn  $m$  von dem Kreise ausgeschlossen ist (Fig. 100), so ist dieselbe durch  $\overline{mr}^2 = \overline{mC}^2 - Cr^2$  dargestellt, was zu beweisen war.

e) Jeder Punkt auf der gemeinsamen Secante zweier Kreise hat in Bezug auf diese Kreise gleiche Potenzen.

Beweis (Fig. 102).  $\overline{ma} \cdot \overline{mb}$  stellt die Potenz des Punktes  $m$  in Bezug auf beide Kreise zugleich vor.

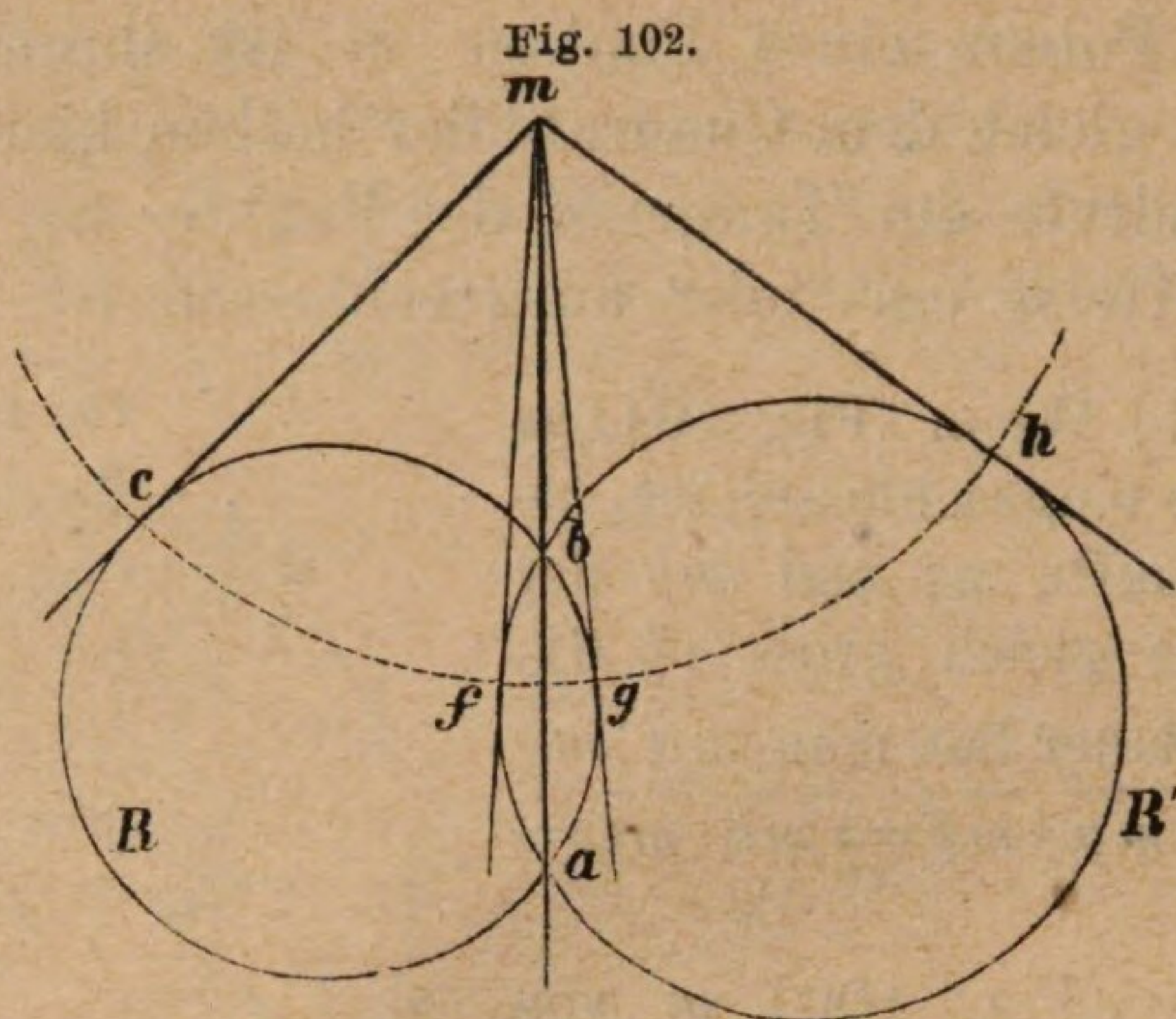
Zusätze. Diejenigen Punkte der gemeinsamen Secante zweier Kreise, welche von beiden Kreisen ausgeschlossen sind, haben die Eigenschaft, dass die von ihnen an die Kreise gelegten Tangenten gleich gross sind. Dieselben Punkte sind Mittelpunkte von Kreisen, welche die gegebenen Kreise rechtwinklig schneiden (Fig. 102).



§ 84.

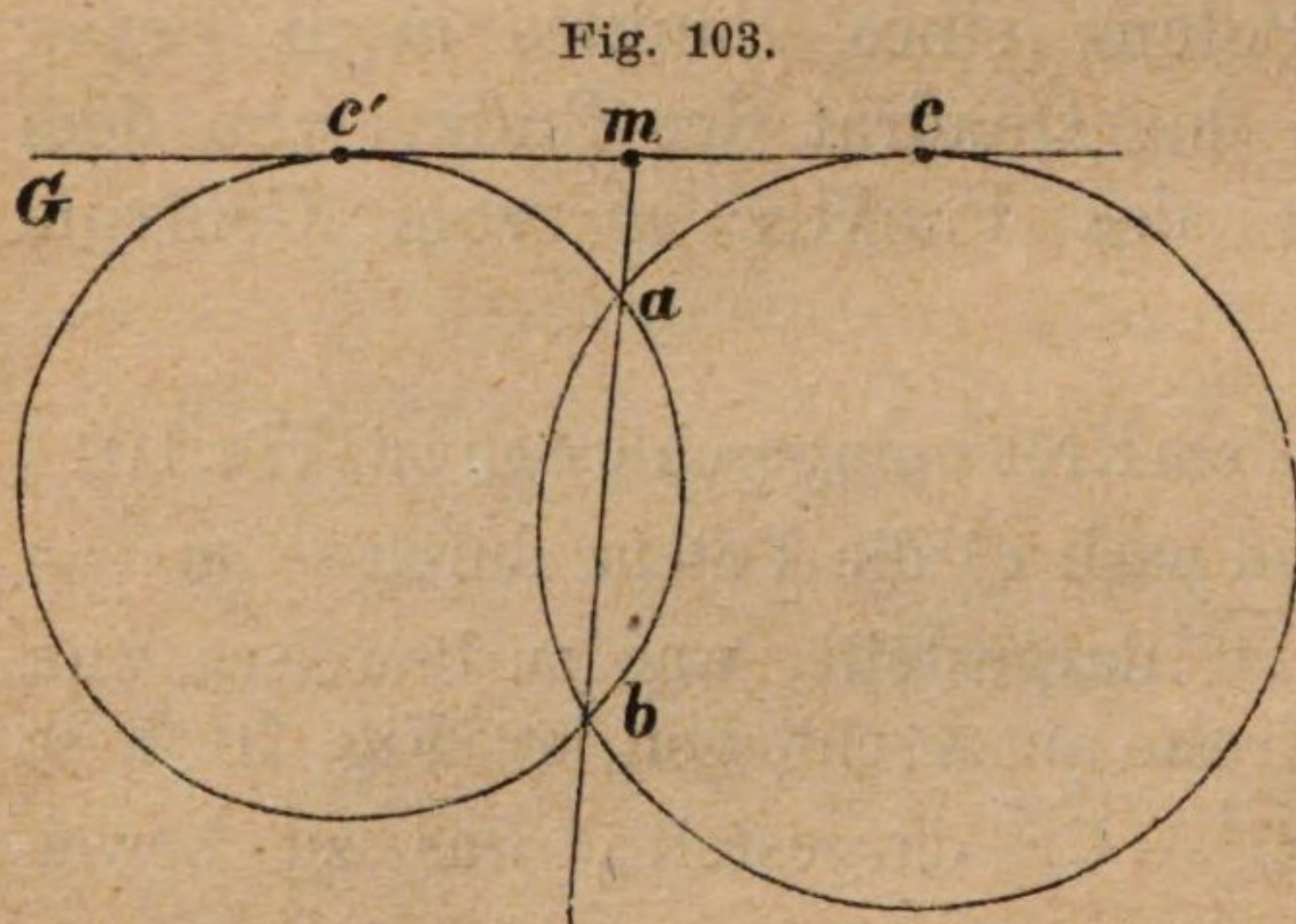
## Aufgaben.

a) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei ge-



gebene Punkte ( $a$  und  $b$  Fig. 103) geht und eine gegebene Gerade  $G$  berührt. (Zwei Auflösungen.)

Auflösung. Man verlängere die Strecke  $ab$ , bis sie die Gerade  $G$  in  $m$  schneidet.



Wenn man nun die mittlere Proportionale (§ 82 b) zwischen  $ma$  und  $mb$  rechts und links von  $m$  auf der Geraden  $G$  aufträgt, so erhält man zwei Punkte  $c$  und  $c'$ , welche Berührungspunkte von zwei Kreisen sind, welche der Aufgabe genügen. Zum Beweise vergleiche § 83 b.

b) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und zwei sich schneidende Geraden berührt. (Zwei Auflösungen.)

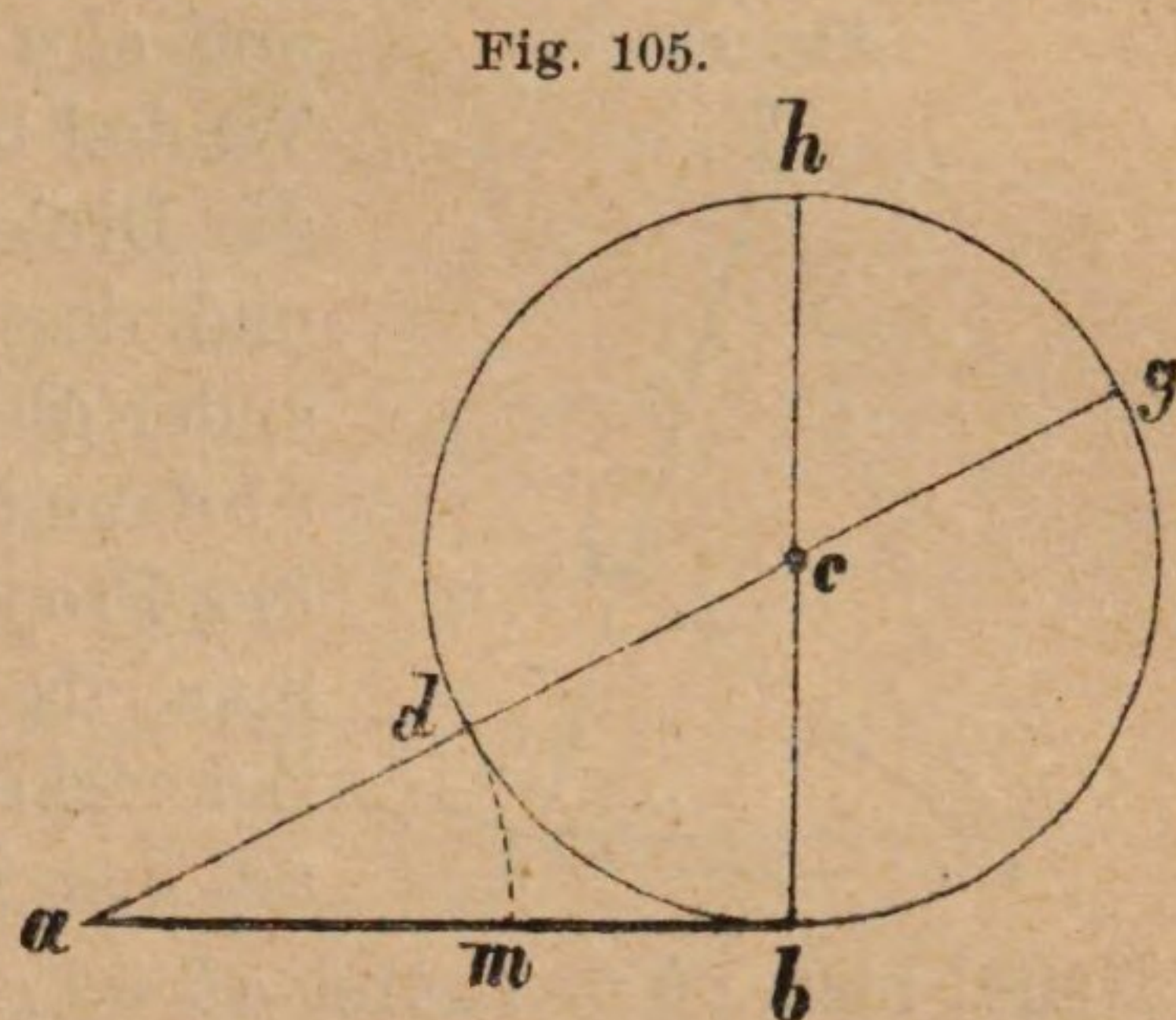
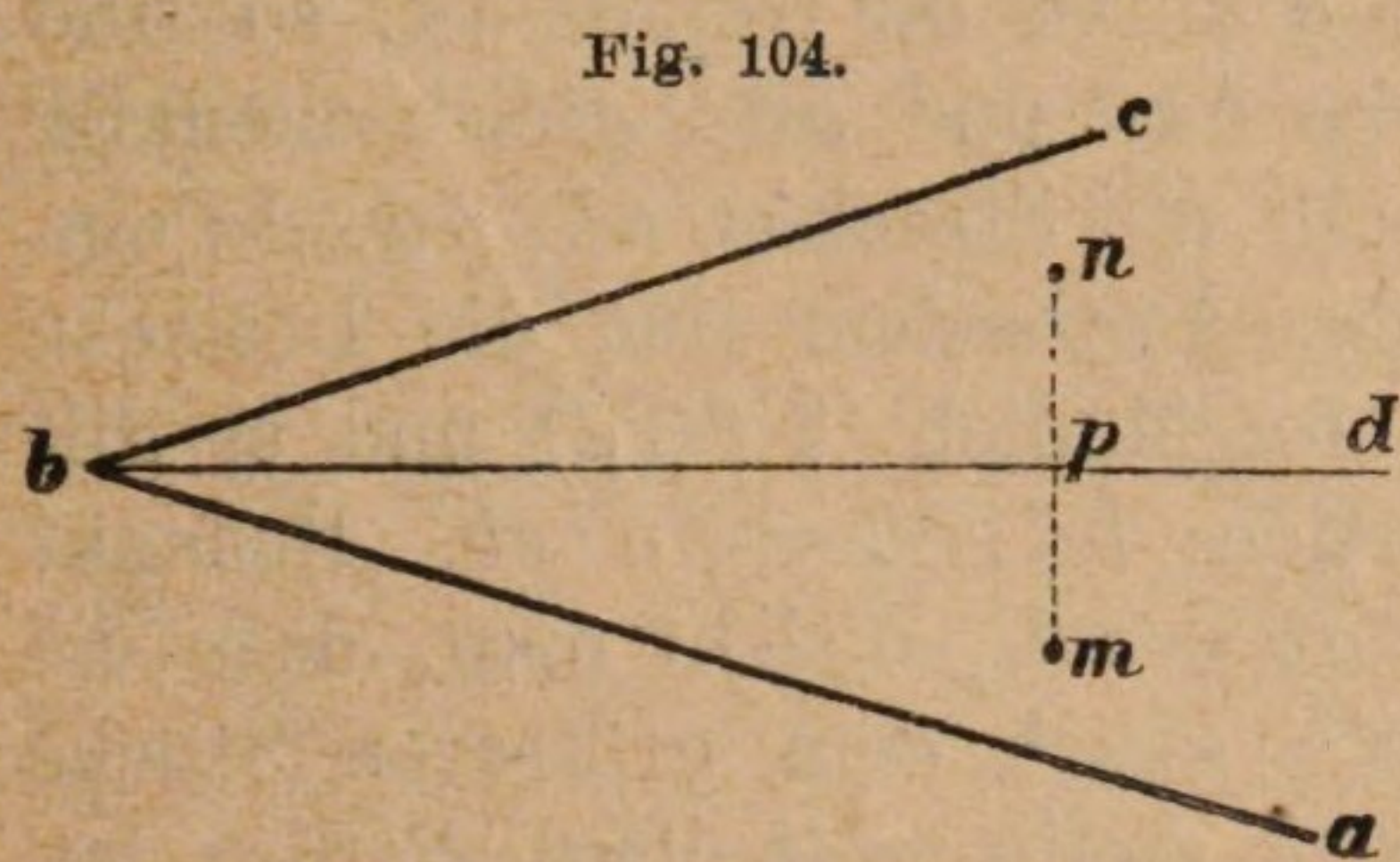
Auflösung.  $m$  (Fig. 104) sei der gegebene Punkt und  $bc$ ,  $ba$  die gegebenen Geraden. Der gesuchte Kreis muss auch durch den Gegenpunkt  $n$  von  $m$  in Bezug auf  $bd$  gehen. Man hat also nach Aufgabe a) Kreise zu zeichnen, welche durch  $m$  und  $n$  gehen, so dass sie die Gerade  $bc$  berühren. Dieselben werden von selbst auch  $ba$  berühren und daher der Aufgabe genügen.

c) Eine gegebene Strecke stetig zu theilen.

Auflösung. Die Strecke  $ab$  (Fig. 105) stetig theilen, heisst



sie in einem Punkte  $m$  so theilen, dass der grössere Abschnitt  $am$  die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Strecke  $ab$  und dem übrigen Stücke ist. Um dies zu bewirken, errichte man  $cb = \frac{ab}{2}$  senkrecht auf  $ab$  und beschreibe um  $c$  einen Kreis mit dem Radius



$cb$ , welcher nach § 30  $\alpha$   $ab$  zur Tangente hat. Sodann ziehe man  $ac$  und trage den äusseren Abschnitt  $ad$  nach  $am$ , so ist  $ab$  in  $m$  stetig getheilt.

Beweis. Aus der Proportion  $ga:ab = ab:ad$  § 83 b folgt nach einer bekannten Regel über die Proportionen die andere:

$$\begin{aligned} ga - ab : ab - ad &= ab : ad \\ ad : mb &= ab : ad \text{ oder} \\ mb : ad &= ad : ab. \end{aligned}$$

d) An eine Strecke eine kleinere anzusetzen, so dass die ganze Strecke stetig getheilt ist.

Auflösung. Man vollende mit der gegebenen Strecke  $ab$  (Fig. 105) die gleiche Construction wie bei c). Die Strecke  $ad$  trage man jedoch auf der Verlängerung von  $ab$  ab, um die gesuchte Länge zu erhalten.

Beweis. Die Behauptung folgt direct aus der Proportion  $ga:ab = ab:ad$ , wenn man bedenkt, dass  $ag$  der ganzen Strecke und  $ad$  der Verlängerung gleich ist.

e) Einen Kreis in 5, 10, 15, 20 ... gleiche Theile zu theilen oder demselben ein regelmässiges 5-, 10-, 15-, 20Eck einzubeschreiben.

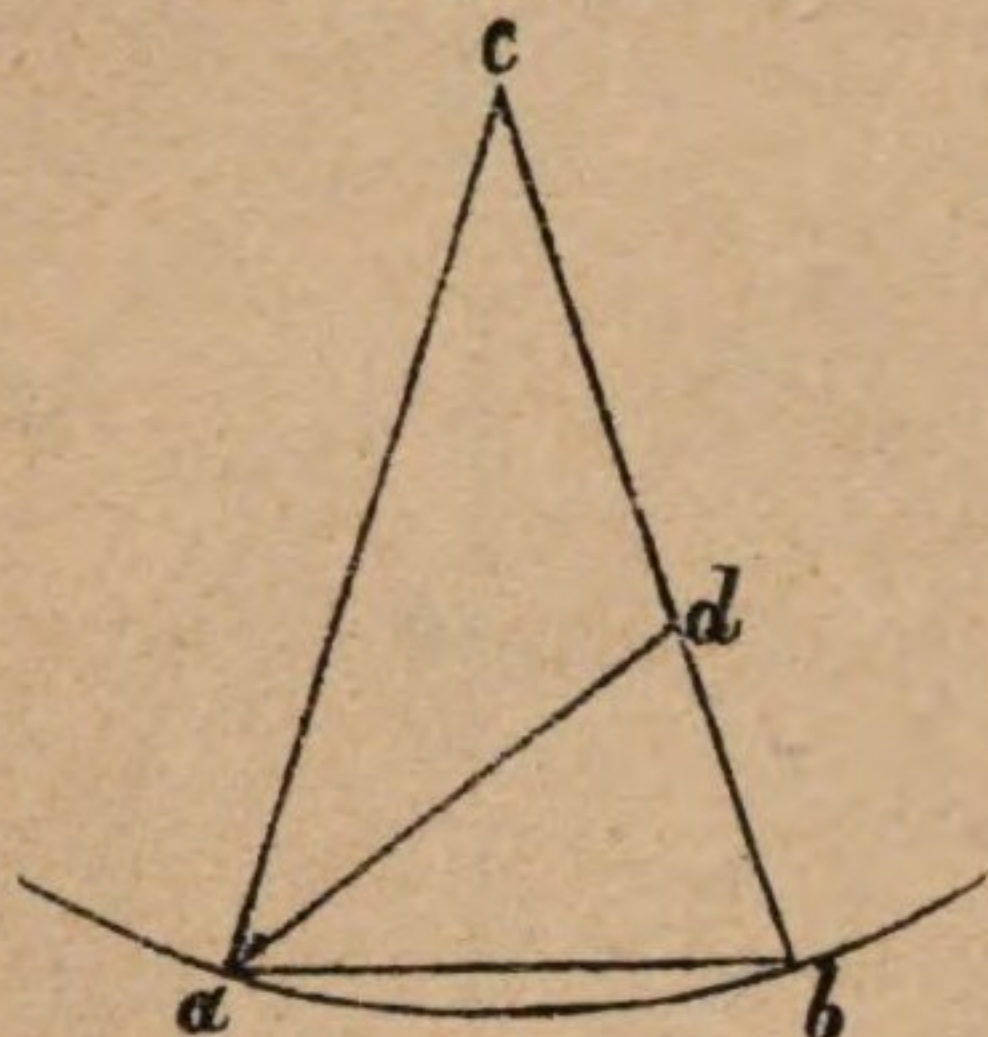
Auflösung. Wenn man den Radius stetig theilt, so kann man das grössere Stück 10mal als Sehne in den Kreis eintragen. Um die 5-Theilung zu erhalten, muss man die abwechselnden Punkte der Zehntheilung übergehen. Um die Theilung in 15



Theile zu erhalten, muss man die Sechstheilung und die Zehnteilung combiniren. Die Theilung in 20 Theile erhält man durch Halbierung der Winkel der Zehnteilung.

Beweis. Wenn  $acb$  (Fig. 106) der Winkel der 10-Theilung ( $36^\circ$ ) und  $ab$  die Zehneckseite ist, so sind die Winkel  $cab$  und  $cba$  beide gleich  $72^\circ$ . Halbirt man den Winkel bei  $a$  durch die Gerade  $ad$ , so sind die Dreiecke  $bad$  und  $adc$  gleichschenkelig und desshalb die Strecken  $ab$ ,  $ad$ ,  $dc$  einander gleich. Ausserdem sind die Dreiecke  $abd$  und  $cba$  ähnlich (§ 80 a) und es gilt die Proportion:  $bd:ab = ba:cb$ . Bedenkt man, dass  $ab = cd$ , so sieht man, dass die Zehneckseite gleich dem grösseren Stücke  $cd$  des in  $d$  stetig getheilten Radius ist.

Fig. 106.



Nennt man  $\overline{cb} = r$  und  $\overline{ab} = z$ , so hat man:  $r:z = z:r - z$ .

Die übrigen Behauptungen der Auflösung beweisen sich leicht.

f) Die Seiten des einbeschriebenen regelmässigen Zehn- und Fünfecks durch den grossen Radius auszudrücken.

Auflösung. Die Zehneckseite ist  $\frac{1}{2}r \cdot (\sqrt{5} - 1)$ , wie sich aus der Proportion  $r:z = z:r - z$  ergibt.

Die Fünfeckseite ist  $\frac{1}{2}r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ , und wird aus der Zehneckseite erhalten, indem man dieselbe für  $s$  in § 74  $\beta$  einsetzt.

## § 85.

## Uebungen.

1) Beliebige viele Dreiecke zu construiren, wenn von ihnen gegeben sind  $\alpha$ ) zwei Winkel,  $\beta$ ) das Verhältniss zweier Seiten und der eingeschlossene Winkel,  $\gamma$ ) die Verhältnisse der Seiten unter einander,  $\delta$ ) das Verhältniss zweier Seiten und der der einen gegenüberliegende Winkel.

2)  $a$ ,  $b$ ,  $c$  seien die Seiten eines Dreiecks. Man soll beliebig viele Dreiecke zeichnen, wenn  $\alpha$ )  $a:b:c = 1:2:3$ ,  $\beta$ )  $a:b = 1:2$ ,  $b:c = 3:5$ .

3) Ein Dreieck mit vorgeschriebener Grundlinie zu zeichnen, welches einem gegebenen Dreieck ähnlich ist.

4) Aehnliche Dreiecke werden  $\alpha$ ) durch homologe Höhen,  $\beta$ ) durch die Halbierungslinien homologer Winkel,  $\gamma$ ) durch Gerade, welche die Mittelpunkte der umbeschriebenen Kreise mit homologen Ecken verbinden,  $\delta$ ) durch die Verbindungslinien homologer Ecken mit den Mitten gegenüberliegenden Seiten — in Dreiecke getheilt, welche paarweise ähnlich sind.

5) Ein senkrecht aufgestellter Stab von  $1\frac{1}{3}$  Meter wirft einen Schatten von 1 Meter. Wie hoch ist ein Thurm, welcher zu derselben Zeit einen Schatten von 90 Meter wirft?



6) Die Abschnitte, in welche die Grundlinie eines Dreiecks durch die Höhe getheilt wird, bilden die äusseren Glieder einer Proportion, deren innere Glieder durch die zugehörige Höhe und denjenigen Abschnitt derselben, welcher von der Grundlinie bis zum Schnittpunkte der drei Höhen reicht, gebildet werden.

7) Von einem gegebenen Dreieck durch eine Parallele mit einer Seite ein Dreieck von gegebenem Umrang abzuschneiden.

8) Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie 4:9. Die Grundlinie des einen ist 2<sup>cm</sup> grösser als die des andern. Wie gross sind beide Grundlinien?

9) Ein Dreieck zu zeichnen, welches so gross ist wie  $\alpha$ ) die Summe,  $\beta$ ) die Differenz zweier ähnlicher Dreiecke.

10) Von einem Dreieck durch eine Parallele mit der Grundlinie den 4., 9., 16. Theil abzuschneiden.

11) Die eine Seite eines Dreiecks von 40 □<sup>m</sup> Fläche beträgt 6,254<sup>m</sup>. Man soll von diesem Dreieck durch eine Parallele mit der Grundlinie ein Dreieck von 22,4 □<sup>m</sup> abschneiden und auf der Seite 6,25<sup>m</sup> die Lage des Theilpunktes angeben.

12) Ein Dreieck durch eine Parallele mit der Grundlinie zu halbiren.

13) In einem rechtwinkligen Dreieck betragen die Abschnitte der Hypotenuse 5<sup>cm</sup> und 7<sup>cm</sup>. Man soll die Höhe und die Katheten berechnen.

14) Wie gross ist die Hypotenuse, wenn die zugehörige Höhe 8<sup>m</sup> und ein durch sie gebildeter Abschnitt 4<sup>m</sup> ist.

15) Zwei Strecken zu construiren, wenn gegeben ist:  $\alpha$ ) die Summe und die mittlere Proportionale,  $\beta$ ) die Differenz und die mittlere Proportionale (für  $\beta$  benutze § 83, b).

16) Die Quadrate der Sehnen, welche von dem einen Endpunkte eines Durchmessers ausgehen, verhalten sich wie ihre Projectionen auf den letzteren.

17) Das Verhältniss der Flächen zweier Quadrate soll durch das Verhältniss zweier Strecken dargestellt werden.

18) Zu construiren:  $\alpha$ )  $\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}$ ,  $\beta$ )  $x^2 = \frac{2}{5} a^2$

19) Das Product der beiden Abschnitte, in welche eine Höhe eines Dreiecks durch die übrigen getheilt wird, ist für alle Höhen gleich gross.

20) Wenn in einem Viereck das Product der beiden Abschnitte, in welche eine Diagonale durch die andere getheilt wird, für beide Diagonalen gleich ist, so liegen die Ecken des Vierecks auf einem Kreise.

21) Die Gegenpunkte (§ 23, Anm.) des Schnittpunkts der 3 Höhen in Bezug auf die Seiten eines Dreiecks liegen auf dem umgeschriebenen Kreise (Aufgabe 6).

22) Einen Kreis zu beschreiben, welcher seinen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden hat, eine andere Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht (2 Auflösungen).

23) Ueber einer gegebenen Seite  $\alpha$ ) ein Zehneck zu zeichnen,  $\beta$ ) ein Fünfeck zu zeichnen.



## II. Abschnitt.

## Aehnlichkeit der Figuren.

## § 86\*. Entstehung ähnlicher Figuren.

a) Wenn zwei Figuren so in einem Strahlbüschel gezeichnet sind, dass je zwei entsprechende Punkte auf einem Strahle liegen und ihre Abstände vom Scheitel constante Verhältnisse bilden, so sind die beiden Figuren ähnlich, das heisst, jedem Dreieck der einen Figur entspricht ein ähnliches Dreieck der andern.

α) Wenn den Dreiecken, welche die Punkte einer Figur mit einer beliebigen Seite derselben bilden, ähnliche Dreiecke gleichen Sinnes in einer andern Figur entsprechen, so können diese Figuren in einen Strahlbüschel gelegt werden und sind ähnlich.

Fig. 107.

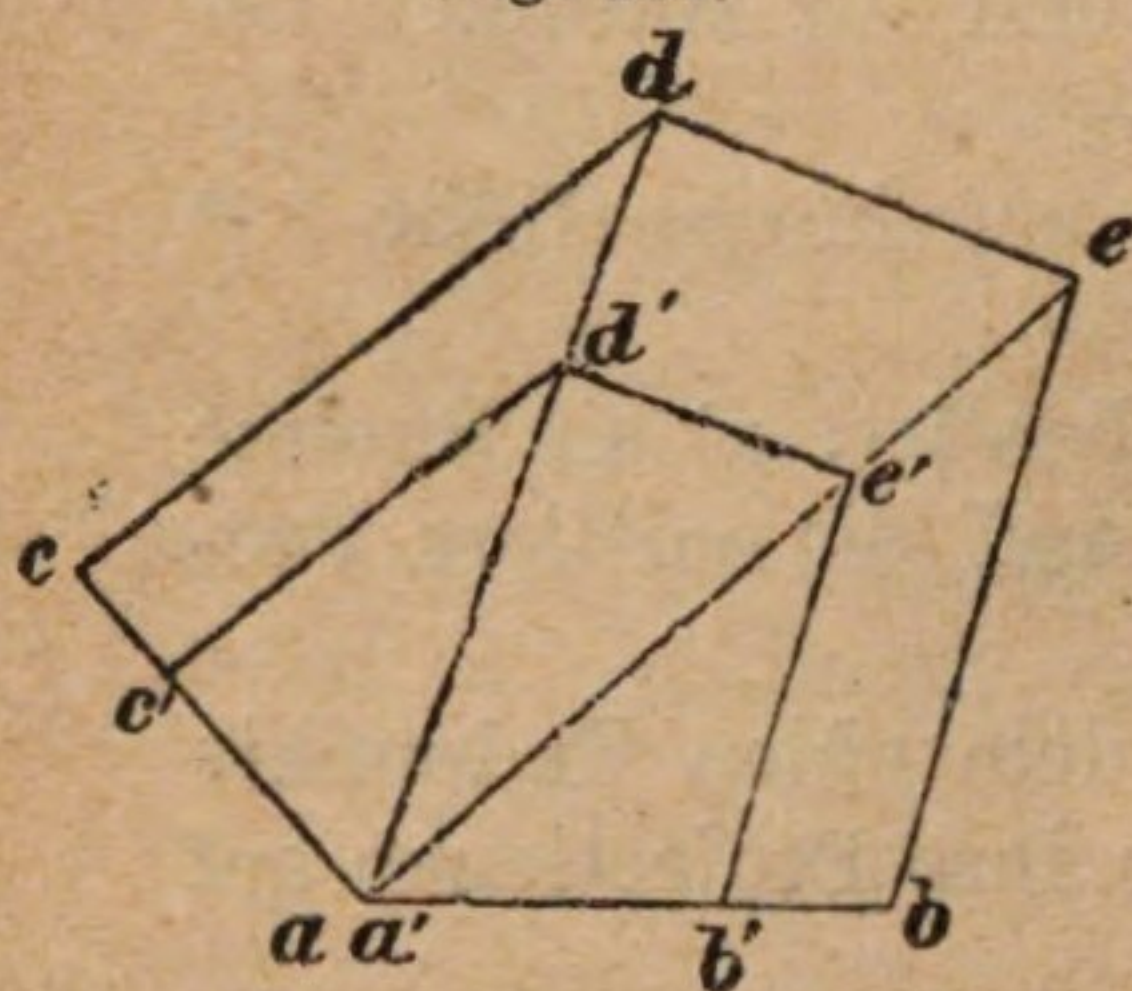
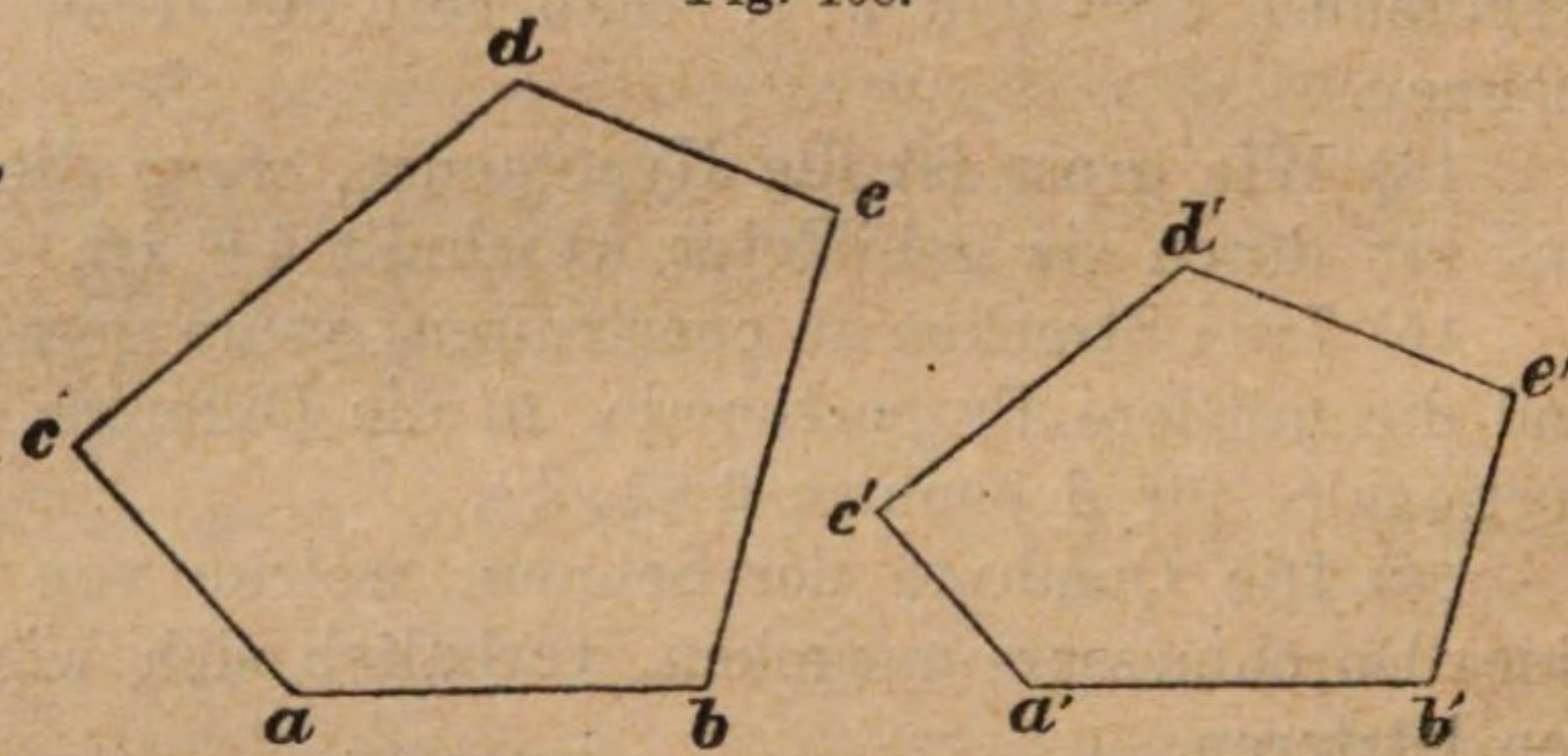


Fig. 108.



## Beweis.

(Fig. 107.) Unter der Voraussetzung  $(ab):(a'b') = (ae):(a'e') = (ad):(a'd') = (ac):(a'c')$  sind die Geraden  $be, bd, bc \dots$  der Reihe nach den Geraden  $b'e', b'd', b'c' \dots$  parallel (§ 63 α). Jedes Dreieck  $(bed, bec \dots)$  der einen Figur ist daher dem entsprechenden Dreieck  $(b'e'd', b'e'c' \dots)$  der andern Figur ähnlich (§ 80 a). Der Scheitel des Büschels entspricht sich in beiden Figuren selbst und die Dreiecke  $abe, abd \dots$  sind den Dreiecken  $a'b'e', a'b'd' \dots$  ebenfalls ähnlich.

(Fig. 108.) Wenn die Dreiecke  $abe, abd, abc \dots$  mit den Dreiecken  $a'b'e', a'b'd', a'b'c' \dots$  der Reihe nach ähnlich und von gleichem Sinne sind, so folgt hieraus  $ab:a'b' = ae:a'e' = ad:a'd' = ac:a'c' \dots$  und die Gleichheit entsprechender Winkel bei  $a$  und  $a'$ , welche überdies gleichen Sinnes sind. Man kann also diese Figuren in die Lage von Fig. 107 bringen und die Aehnlichkeit derselben ergibt sich aus a).



## Erklärungen und Zusätze.

b) Wenn ähnliche Figuren in einem Strahlbüschel liegen, wie bei Fig. 107, so sagt man, sie seien in perspectivischer Lage.

c) Zwei ähnliche Figuren sind von gleichem Sinne, wenn je zwei entsprechende Dreiecke derselben gleichen Sinnes sind. (§ 16 Anmerkung.)

d) Wenn man ähnliche Figuren so legt, dass die entsprechenden Schenkel homologer Winkel sich decken oder in entgegengesetzte Richtung fallen, so befinden sich die Figuren in perspectivischer Lage.

$\beta$ ) Jede andere Lage heisst die schiefe Lage ähnlicher Figuren.

$\gamma$ ) Wenn man die eine von zwei ähnlichen Figuren gleichen Sinnes umkehrt, so erhält man ähnliche Figuren entgegengesetzten Sinnes. In denselben sind je zwei entsprechende Dreiecke ähnlich und von entgegengesetztem Sinne.

$\delta$ ) Aehnliche Figuren gleichen Sinnes kann man durch alleiniges Verschieben in perspectivische Lage bringen. Bei ähnlichen Figuren entgegengesetzten Sinnes ist hierzu noch das Umwenden einer Figur nöthig.

## Eigenschaften ähnlicher Figuren.

§ 87.\*

Eigenschaften der perspectivischen Lage ähnlicher Figuren.

a) Die Verbindungslinien entsprechender (homologer) Punkte bilden die Strahlen eines Strahlbüschels. Der Mittelpunkt dieses Strahlbüschels heisst innerer oder äusserer Aehnlichkeitspunkt der Figuren, je nachdem er die Strecke zwischen zwei entsprechenden Punkten innen oder aussen theilt.

b) Der Aehnlichkeitspunkt ist ein sich selbst entsprechender Punkt beider Figuren.

$\alpha$ ) Zwei entsprechende (homologe) Strecken sind parallel. Dieselben haben übereinstimmende oder entgegengesetzte Richtung, je nachdem der Aehnlichkeitspunkt der Figuren ein äusserer oder innerer ist.

$\beta$ ) Jeder Strahl des Aehnlichkeitspunktes (Aehnlichkeitsstrahl) ist eine sich selbst entsprechende Gerade beider Figuren.



c) Die Schnittpunkte eines Aehnlichkeitsstrahles mit entsprechenden Geraden sind homologe Punkte.

γ) Parallele Gerade, welche durch homologe Punkte gezogen sind, entsprechen sich ebenfalls.

Eigenschaften der ähnlichen Figuren in beliebiger Lage.

d) Jedem Punkte der einen Figur entspricht ein einziger Punkt der andern. Der Verbindungslinie zweier Punkte der einen Figur entspricht die Verbindungslinie der homologen Punkte in der andern Figur.

δ) Jeder Geraden der einen Figur entspricht eine einzige Gerade der andern. Dem Schnittpunkte zweier Geraden der einen Figur entspricht der Schnittpunkt der homologen Geraden in der andern Figur.

e) Die entsprechenden Strahlen zweier homologer Punkte bilden zwei congruente Strahlbüschel. Zwei entsprechende Winkel sind einander gleich.

ε) Die entsprechenden Punkte zweier homologer Geraden bilden ähnliche Punkt-reihen. Zwei entsprechende Strecken bilden ein constantes Verhältniss.

f) Den Punkten eines Kreises der einen Figur entsprechen die Punkte eines Kreises der andern Figur.

φ) Den Tangenten eines Kreises der einen Figur entsprechen die Tangenten eines Kreises der andern Figur.

#### § 88.\* Bestimmung ähnlicher Systeme durch Paare homologer Stücke.

Wenn man annimmt, dass die Anzahl der Paare homologer Punkte in zwei ähnlichen Figuren nicht bestimmt sei, sondern sich vorstellt, dass jeder Punkt oder jede Gerade der Ebene als der einen oder andern Figur angehörig betrachtet werden kann, so gebraucht man den Ausdruck „ähnliche Systeme.“

a) Die Beziehung zwischen ähnlichen Systemen in perspectivischer Lage ist vollständig bestimmt, wenn der Aehnlichkeitspunkt und zwei entsprechende Punkte auf einem Aehnlichkeitsstrahl oder zwei parallele Linien als entsprechende Gerade gegeben sind.

α) Die Beziehung zwischen zwei ähnlichen Systemen in schiefer Lage ist vollständig bestimmt, wenn zwei Paare entsprechender Punkte oder ein Paar entsprechender Punkte und ein Paar entsprechender Geraden gegeben sind.



## Beweis.

(Fig. 107.) Wenn der Aehnlichkeitspunkt  $(a, a')$  und die entsprechenden Punkte  $b$  und  $b'$  gegeben sind, so findet man zu dem Punkte  $e$  der ersten Figur den entsprechenden Punkt  $e'$  der zweiten, indem man den Strahl  $ae$  mit einer Geraden schneidet, welche durch  $b'$  parallel mit  $be$  gezogen ist.

Man kann also zu jedem Punkt der einen Figur einen entsprechenden Punkt der andern Figur construiren, worin der Beweis gelegen ist.

In dem zweiten Falle sind je zwei Schnittpunkte eines Aehnlichkeitsstrahles mit den parallelen Geraden entsprechende Punkte der ähnlichen Systeme, womit dieser Fall auf den ersten zurückgeführt ist.

b) Wenn die Endpunkte zweier paralleler Strecken einander paarweise entsprechend gedacht werden, so existirt ein Punkt der Ebene, welcher mit diesen Strecken ähnliche Dreiecke von gleichem Sinne bildet.

c) Wenn zwei ähnliche Figuren gleichen Sinnes so liegen, dass zwei entsprechende Gerade parallel sind, so befinden sich dieselben in perspectivischer Lage.

Beweis von b) und c).

(Fig. 107.) Die Verbindungslinien  $ee'$  und  $bb'$  entsprechender Punkte zweier paralleler Strecken  $eb$  und  $e'b'$  schneiden sich in

(Fig. 108.) Wenn die Paare  $a, a'$  und  $b, b'$  entsprechender Punkte gegeben sind, so findet man zu einem Punkte  $e$  der ersten Figur den entsprechenden Punkt der zweiten, indem man das Dreieck  $a'b'e'$  so construirt, dass es dem Dreieck  $abe$  ähnlich und mit ihm gleichen oder entgegengesetzten Sinnes ist, je nachdem die ähnlichen Systeme gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sein sollen.

Man kann also zu jedem Punkt der einen Figur einen einzigen entsprechenden Punkt der andern construiren, worin der Beweis gelegen ist.

Der zweite Fall ist leicht hierauf zurückzuführen.

$\beta$ ) Wenn auf zwei convergenten Geraden zwei Strecken liegen, deren Endpunkte paarweise entsprechend gedacht werden, so existirt ein Punkt der Ebene, welcher mit denselben ähnliche Dreiecke gleichen Sinnes bildet.

$\gamma$ ) Zwei ähnliche Figuren gleichen Sinnes können dadurch in ähnliche Lage gebracht werden, dass man die eine um einen gewissen Punkt der Ebene dreht.

Beweis von  $\beta$ ) und  $\gamma$ ).

(Fig. 109.) Die Verbindungslinien  $aa'$ ,  $bb'$  der entsprechenden Endpunkte zweier nicht paralleler Strecken mögen sich in  $R$  schnei-



einem Punkte  $(a, a')$ , welcher mit diesen Strecken ähnliche Dreiecke gleichen Sinnes  $bae, b'a'e'$  bildet. Wenn  $eb$  und  $e'b'$  entsprechende Strecken ähnlicher Figuren sind, so ist der Durchschnitt  $(a, a')$  von  $ee'$  und  $bb'$  ein sich selbst entsprechender Punkt beider Figuren und die entsprechenden Winkel  $eab$  und  $e'a'b'$  decken einander. Die beiden ähnlichen Figuren befinden sich also (§ 86 d) in perspectivischer Lage und  $(a, a')$  ist ihr Aehnlichkeitspunkt.

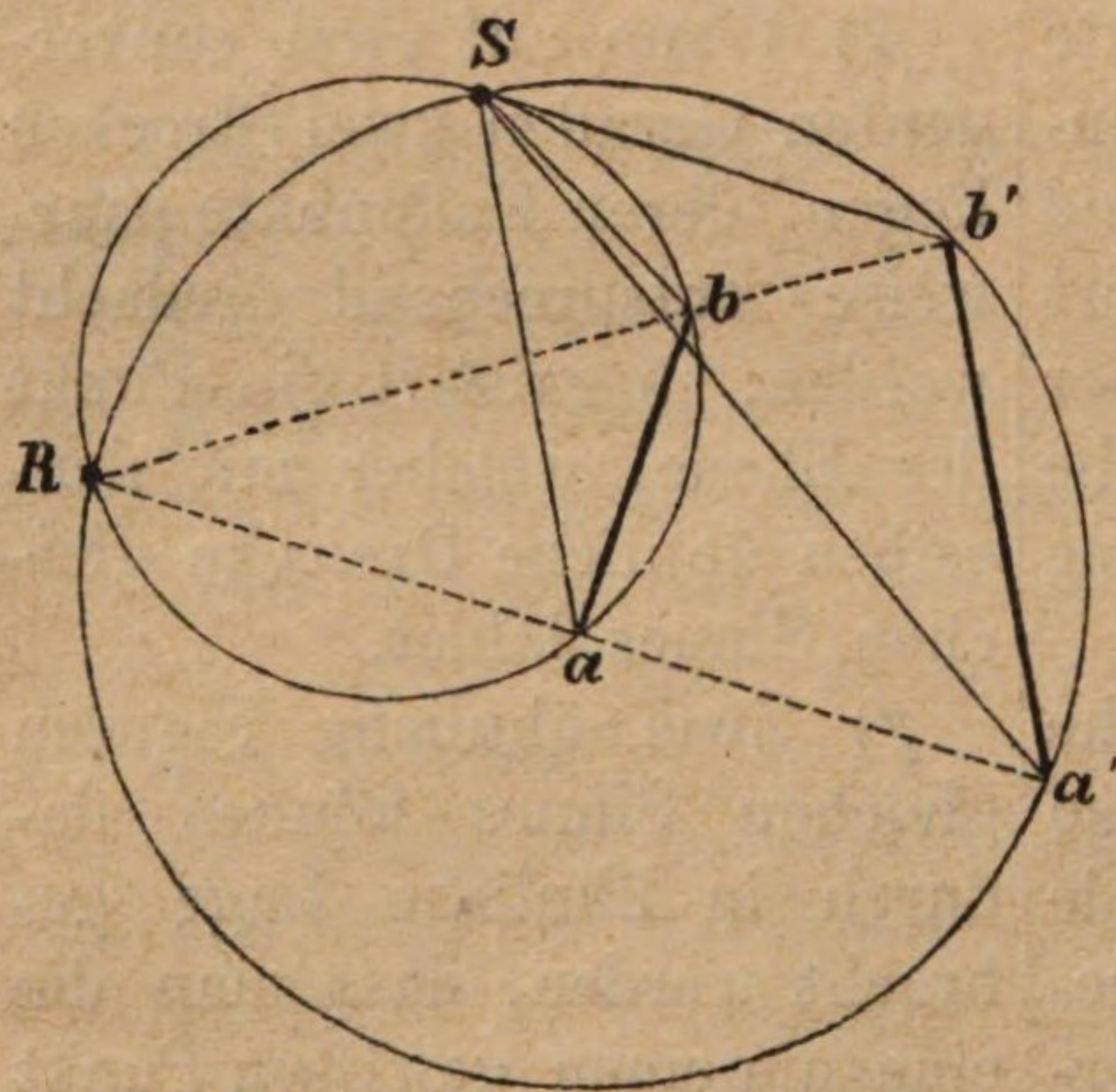
den. Die Kreise  $abR$  und  $a'b'R$  schneiden sich zum zweiten Male in  $S$  und dieser Punkt bildet mit jenen Strecken die ähnlichen Dreiecke gleichen Sinnes  $bSa, b'Sa'$  (§ 36 d, § 80 a.) Wenn aber  $ab$  und  $a'b'$  entsprechende Strecken in ähnlichen Figuren gleichen Sinnes sind, so können diese Figuren dadurch in perspectivische Lage gebracht werden, dass man die eine derselben um  $S$  dreht, bis die beiden Strecken parallel sind.

## § 89.\*

## Uebungen.

1) In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt der Höhen, der Schwerpunkt und der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises in gerader Linie. Der Schwerpunkt theilt den Abstand der übrigen Punkte nach dem Verhältnisse 2:1. (Lehrsatz von Euler.)

Fig. 109.



Andeutung. Die Endpunkte der Grundlinie mit dem Schnittpunkt der Höhen einerseits und die Mitten der übrigen Seiten mit dem Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises andererseits bilden ähnliche Dreiecke in perspectivischer Lage. Ihr Aehnlichkeitspunkt ist der Schwerpunkt.

2) Der auf einer Höhe eines Dreiecks gemessene Abschnitt von einem Eckpunkte bis zum Schnittpunkte der Höhen (oberer Höhenabschnitt) ist doppelt so gross als der Abstand der gegenüberliegenden Seite von dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises.

3) Der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises (§ 41, 31) halbirt den Abstand zwischen dem Schnittpunkte der Höhen und dem Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises.

Andeutung. Die Mittelpunkte zweier oberer Höhenabschnitte mit dem Schnittpunkte der Höhen einerseits und die Mittelpunkte der



diesen Höhen zugehörigen Seiten mit dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises andererseits, bilden ähnliche Dreiecke in perspectivischer Lage. Ihr Aehnlichkeitspunkt ist der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises.

4) Durch einen Punkt  $m$  eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier Geraden  $A$  und  $B$  zu ziehen.

5) Mit einer gegebenen Richtung  $C$  parallel eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier Geraden  $A$  und  $B$  zu ziehen.

Andeutung. Wenn man zwei ähnliche Dreiecke so zeichnet, dass  $A$  ein Aehnlichkeitsstrahl derselben ist,  $B$  eine Seite des einen Dreiecks wird und zwei entsprechende Seiten der Dreiecke mit  $C$  parallel sind, so erfüllt die eine dieser letzteren die Forderung der Aufgabe.

6) Von einem Vierecke sind nur zwei gegenüberliegende Punkte  $a$  und  $b$  zugänglich. Man soll die zweite Diagonale ziehen.

Andeutung. Zeichne ein ähnliches Viereck, so dass  $a$  Aehnlichkeitspunkt beider Vierecke wird. Suche die fragliche Diagonale zuerst in dieser Figur und construiere die homologe Gerade der andern.

7) Die Ecken eines Vierecks sind sämtlich unzugänglich. Man soll die Diagonalen ziehen.

Andeutung. Man nehme auf den Seiten  $A, B, C, D$  vier Punkte  $a, b, c, d$  an und zeichne ein ähnliches Viereck  $a, b', c', d'$ , so dass  $a$  der Aehnlichkeitspunkt beider Vierecke wird. Zieht man nun durch  $b', c', d'$  Parallele mit  $B, C, D$ , so hat man ein mit dem gegebenen ähnliches Viereck und kann wie in 6) verfahren.

### III. Abschnitt.

#### Die Potenzlinien zweier und mehrerer Kreise.

##### Die Potenzlinie zweier Kreise.

§ 90.\*

a) Der geometrische Ort aller Punkte, welche in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenzen haben, ist eine Gerade, welche auf der Centralen dieser Kreise senkrecht steht und die Potenzlinie der beiden Kreise heisst.

Beweis (Fig. 110). Wenn  $m$  in Bezug auf die beiden Kreise  $C$  und  $C'$ , deren Radien  $r$  und  $r'$  sein mögen, gleiche Potenzen hat, so ist (§ 83 d)  $\overline{mC'}^2 - r'^2 = \overline{mC}^2 - r^2$  oder:  $\overline{mC'}^2 - \overline{mC}^2 = r'^2 - r^2$ . Daher folgt aus § 60 b die Richtigkeit der Behauptung.

##### Zusätze.

b) Wenn zwei Kreise sich schneiden oder berühren, so |  $\beta$ ) Wenn zwei Kreise sich nicht treffen, so liegt ihre



ist ihre Potenzlinie durch ihre gemeinsame Sehne oder Tangente dargestellt.

c) Diejenigen Punkte der Potenzlinie, welche von beiden Kreisen ausgeschlossen sind, haben die Eigenschaft, dass von ihnen aus gleichlange Tangenten an die beiden Kreise gezogen werden können (§ 83 c).

Potenzlinie ausserhalb jedes Kreises.

γ) Diejenigen Punkte der Potenzlinie, welche von den Kreisen eingeschlossen sind, haben die Eigenschaft, dass die durch dieselben gezogenen kleinsten Sehnen der beiden Kreise einander gleich sind (§ 83 c).

### § 91.\* Die Potenzlinien dreier Kreise.

a) Die drei Potenzlinien je zweier von drei Kreisen schneiden sich in einem Punkte, welcher der Potenzpunkt der drei Kreise genannt wird.

α) Wenn man von einem Punkte der Potenzlinie zweier Kreise durch jeden derselben eine Secante zieht, so liegen die 4 Schnittpunkte auf einem dritten Kreise.

Beweis a) Der Schnittpunkt der beiden Potenzlinien, welche ein Kreis  $A$  mit den Kreisen  $B$  und  $C$  gemein hat, ist auch auf der Potenzlinie der Kreise  $B$  und  $C$  gelegen, denn dieser Punkt hat in Bezug auf die 3 Kreise  $A, B, C$  gleiche Potenzen. Der Beweis von α) wird indirect geführt. (Vergleiche auch § 85, 20.)

#### Aufgaben.

b) Die Potenzlinie zweier Kreise, welche sich nicht schneiden, zu finden. (Fig. 110.)

Auflösung. Man zeichne einen dritten Kreis, welcher die gegebenen Kreise schneidet. Die gemeinsamen Secanten schneiden sich auf einem Punkte der gesuchten Potenzlinie. — Wende § 90 a an.

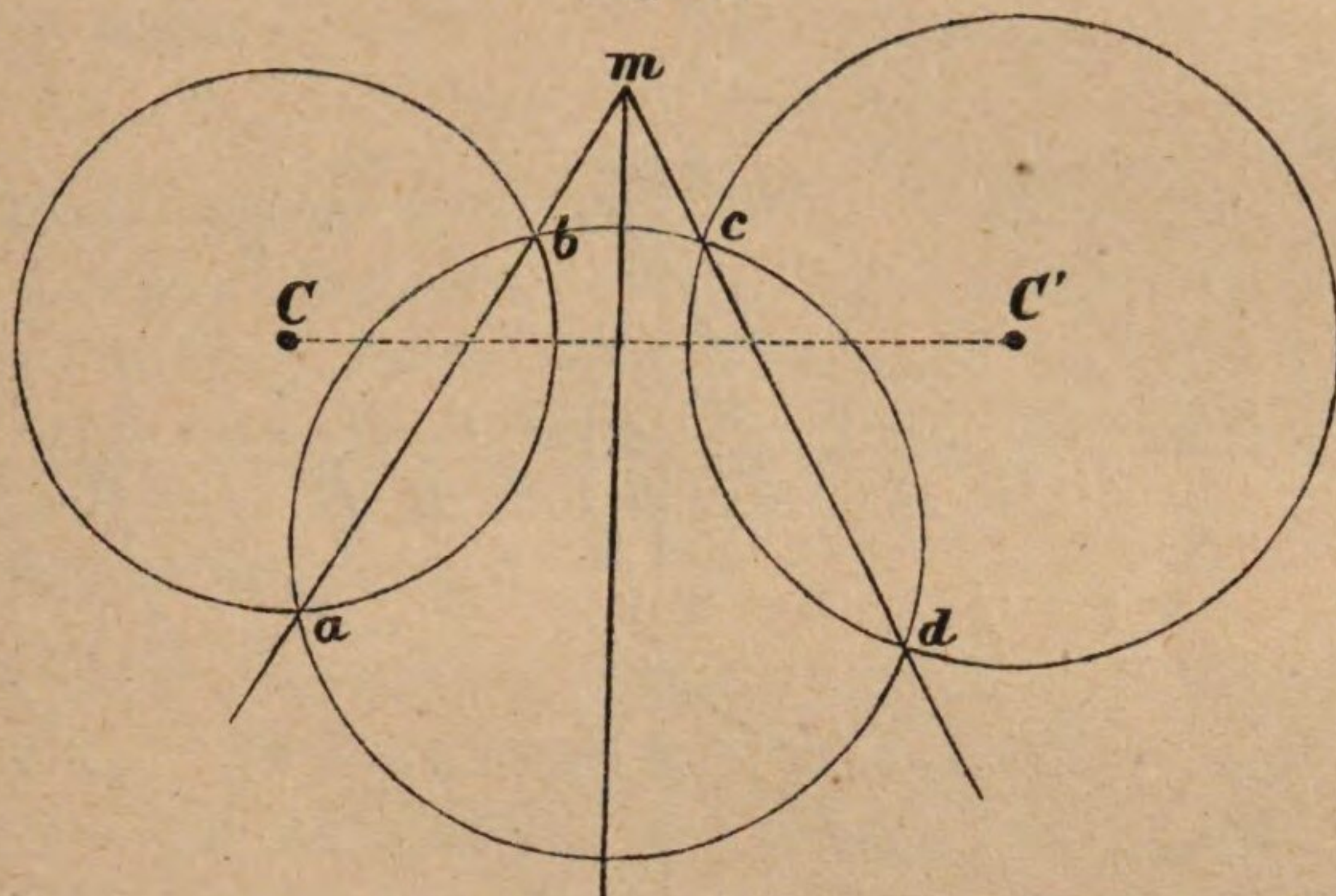
c) Man soll durch einen Punkt einen Kreis ziehen, welcher mit einem gegebenen Kreis eine gegebene Gerade zur Potenzlinie hat.

Auflösung. Wenn der Kreis und die Gerade sich schneiden, so folgt die Construction aus § 83 e. Wenn sie sich nicht schneiden (Fig. 110), so verbinde man einen beliebigen Punkt  $m$  der Potenzlinie mit dem gegebenen Punkte  $c$  und ziehe zugleich durch  $m$  eine Secante  $ab$  des gegebenen Kreises  $C$ . Der Kreis  $abc$  bestimmt auf der Geraden  $mc$  einen weiteren Punkt  $d$  des gesuchten Kreises. — Wende § 90 a an.



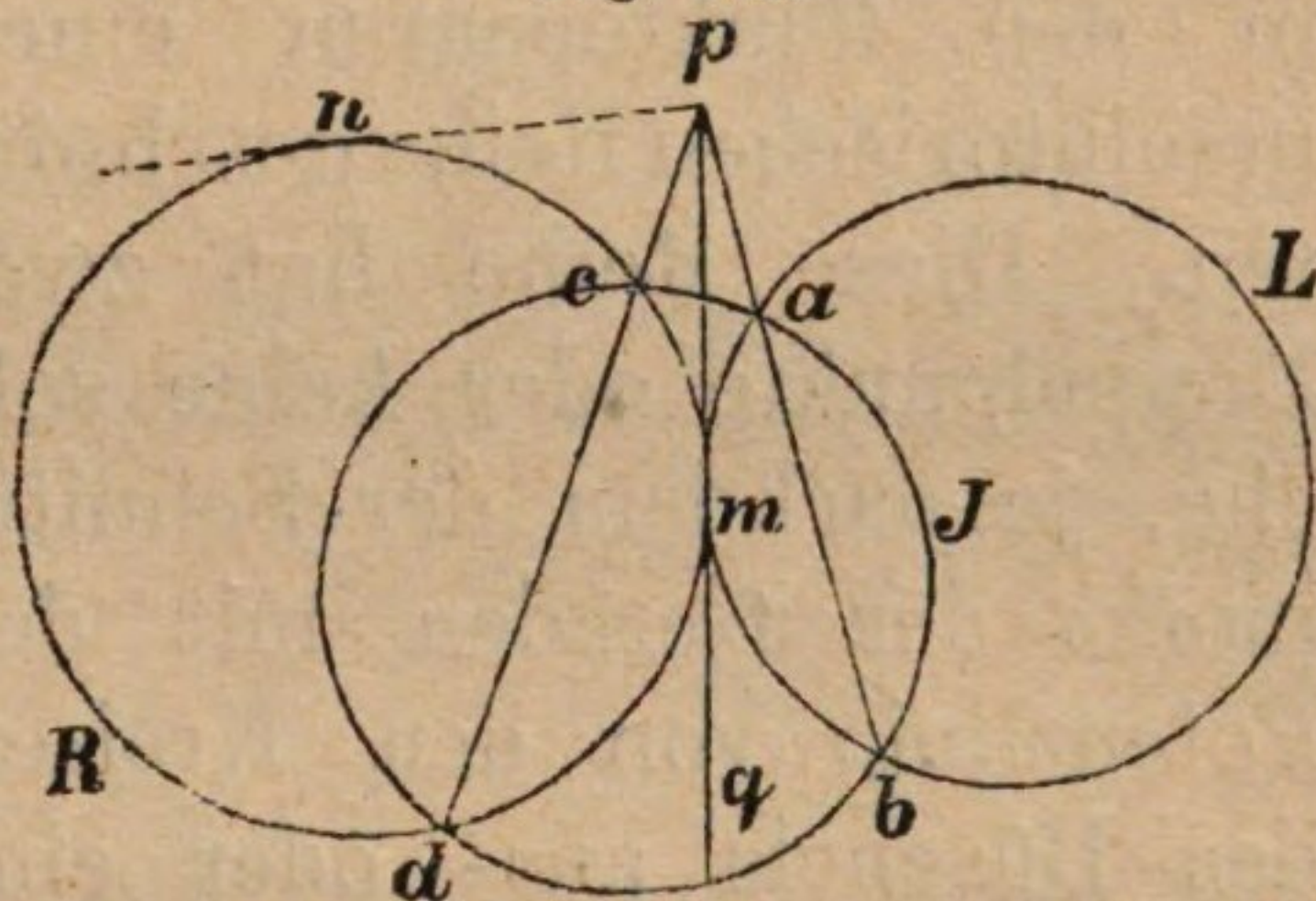
d) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt. (2 Auflösungen.)

Fig. 110.



Auflösung (Fig. 111). Man ziehe durch die gegebenen Punkte  $a, b$  einen Kreis, welcher den gegebenen Kreis  $R$  in  $c$  und  $d$  schneidet. Jede der beiden von dem Durchschnittspunkte  $p$  der Geraden  $ab$  und  $cd$  an  $R$  gelegten Tangenten ist die gemeinschaftliche Tangente von  $R$  und einem Kreise  $L$ , welcher der Aufgabe genügt. (Verwende zum Beweise § 91 a.)

Fig. 111.



### Der Büschel von Kreisen.

§ 92.\*

a) Erklärung. Beliebige viele Kreise bilden einen Büschel, wenn die nämliche Gerade Potenzlinie von je zweien derselben ist.

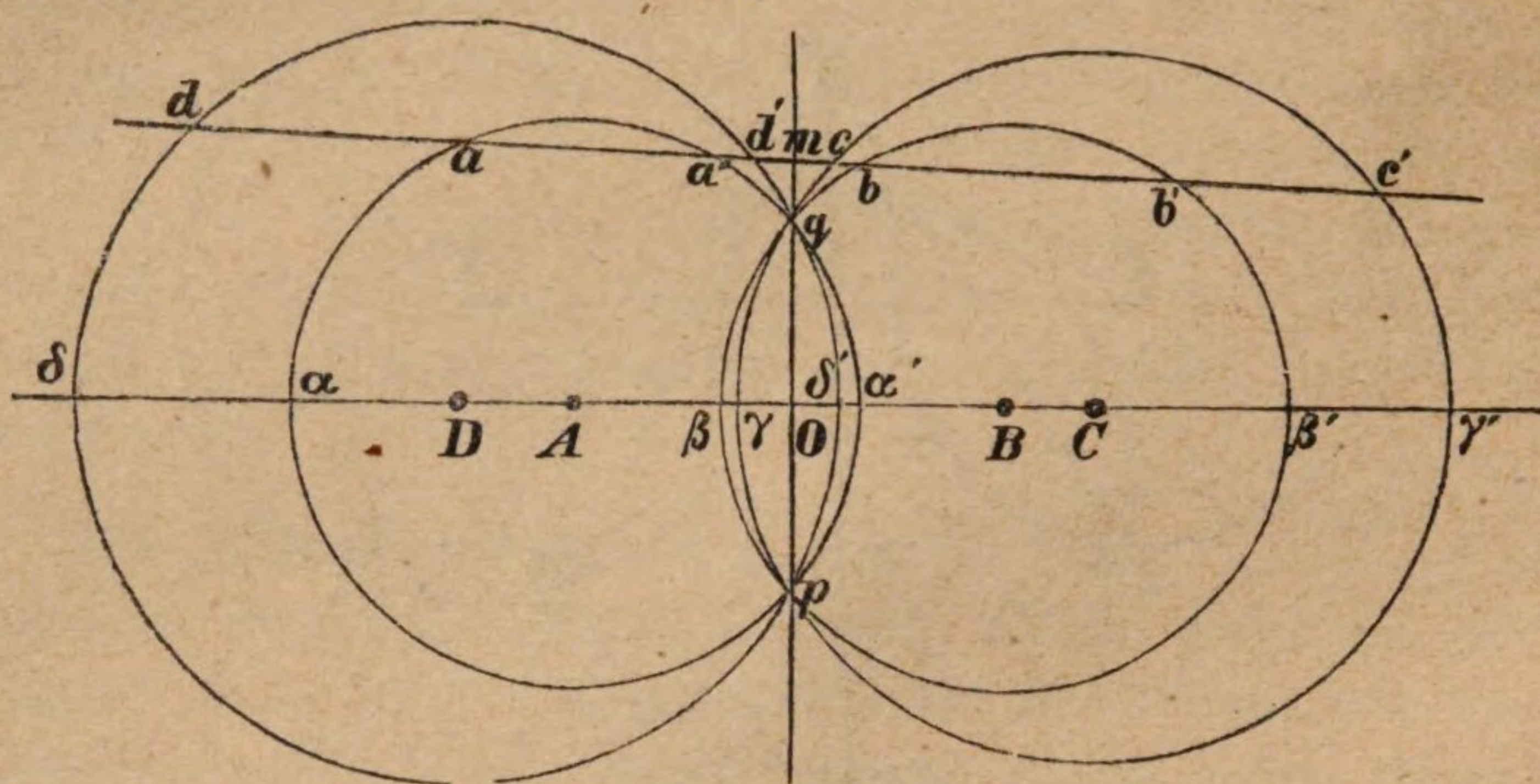
$\alpha$ ) Ein Kreis  $A$  und eine Gerade  $G$  bestimmen einen Büschel. Jeder Kreis, welcher mit  $A$  die Gerade  $G$  zur Potenzlinie hat, gehört demselben an.

Beweis  $\alpha$ ). Wenn die Gerade  $Om$  (Fig. 112) zugleich Potenzlinie der Kreise  $A$  und  $B$ ,  $A$  und  $C$ ,  $A$  und  $D$  ... ist, so hat jeder ihrer Punkte in Bezug auf  $A, B, C, D$  ... gleiche Potenzen, worin der Beweis gelegen ist. Die Mittelpunkte  $A, B, C$  ... liegen auf derjenigen Geraden, welche von  $A$  senkrecht auf die gemeinsame Potenzlinie gefällt ist (§ 90 a.)



b) Zusatz. Die Kreise eines Büschels haben entweder eine gemeinschaftliche Sehne, oder sie berühren sich in demselben Punkte oder kein Kreis des Büschels trifft den andern.

Fig. 112.



c) Eine Gerade wird von den Kreisen eines Büschels in den Punktpaaren einer involutorischen Reihe geschnitten. Diese Reihe hat zwei Doppelpunkte oder keine solche, je nachdem der Schnittpunkt der Geraden mit der Potenzlinie von den Kreisen des Büschels aus- oder eingeschlossen ist.

γ) Wenn man durch je zwei zugeordnete Punkte einer involutorischen Reihe und einen ausserhalb ihres Trägers gelegenen Punkt Kreise zieht, so bilden dieselben einen Büschel, das heisst, sie gehen alle durch einen zweiten gemeinschaftlichen Punkt.

(Vergleiche Fig 112.) Wenn die Potenzlinie der Kreise von der Geraden in  $m$  getroffen wird, so ist  $(ma) \cdot (ma') = (mb) \cdot (mb') = (mc) \cdot (mc') \dots$ , weil der Punkt  $m$  in Bezug auf die Kreise des Büschels gleiche Potenzen hat. Der Werth dieser Producte ist positiv oder negativ, je nachdem der Punkt  $m$  von den Kreisen des Büschels aus- oder eingeschlossen ist. Die Behauptungen ergeben sich also aus § 71 a, b und c.

(Fig. 112.) Wenn  $(ma) \cdot (ma') = (mb) \cdot (mb') = (mc) \cdot (mc')$  ... die Gleichung einer involutorischen Reihe ist, so haben die Kreise  $aa'q$ ,  $bb'q$ ,  $cc'q$  in Bezug auf  $m$  gleiche Potenzen. Die Potenzen des Punktes  $q$  in Bezug auf diese Kreise sind aber ebenfalls gleich (sie haben den Werth Null), woraus sich ergibt, dass  $mq$  die gemeinschaftliche Potenzlinie dieser Kreise ist.



d) Die Centrale eines Büschels wird von den Kreisen desselben in den Punktepaaren einer involutorischen Reihe geschnitten.

δ) Wenn die Abstände je zweier zugeordneter Punkte einer involutorischen Reihe Durchmesser von Kreisen sind, so bilden diese Kreise einen Büschel.

Der Beweis von d) ergibt sich aus c). Etwaige Doppelpunkte der involutorischen Reihe kann man als Kreise des Büschels betrachten, welche zu einem Punkte zusammengeschrumpft sind.

Die gemeinsame Potenzlinie ist nach § 90 a die in dem Mittelpunkt der involutorischen Reihe errichtete Senkrechte.

e) Zwei Punktepaare bestimmen eine involutorische Reihe.

Beweis. Zwei Punktepaare einer Geraden bestimmen mit einem ausserhalb der Geraden gelegenen Punkte zwei Kreise und dadurch einen Büschel von Kreisen, welche die Gerade in den übrigen Punktepaaren der involutorischen Reihe schneiden.

### Uebungen.

§ 93.\*

1) Wenn der eine von zwei Kreisen zu einem Punkt  $m$  zusammenschrumpft, so geht die gemeinsame Potenzlinie durch die Halbirungspunkte der von  $m$  an den Kreis gezogenen Tangenten.

2) Die Halbirungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kreise liegen auf einer Geraden, nämlich der Potenzlinie dieser Kreise.

3) Die Potenzlinie zweier Kreise ist der geometrische Ort derjenigen Kreise, welche die beiden gegebenen Kreise rechtwinklig schneiden.

4) Zieht man eine Gerade, welche in Bezug auf den Mittelpunkt des Centralabstandes zweier Kreise symmetrisch gegen die Potenzlinie derselben gelegen ist, so ist diese Gerade der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche die gegebenen Kreise halbiren, d. h. in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden.

(Man kann diese Gerade dadurch finden, dass man die Radien der gegebenen Kreise verwechselt und nun die Potenzlinie der dadurch entstandenen Kreise zeichnet.)

5) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden und einen andern halbiren, ist eine zu der Centralen beider Kreise senkrechte Gerade.

6) Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kreise zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und

α) einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneiden (1),

β) einen gegebenen Kreis halbiren (setze in 4 den Radius des einen Kreises gleich Null).



7) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch zwei gegebene Punkte geht und

$\alpha$ ) einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet,

$\beta$ ) einen gegebenen Kreis halbt.

8) Einen Punkt zu suchen, so dass die von ihm an drei gegebene Kreise gezogenen Tangenten gleich sind.

9) Einen Kreis zu zeichnen, welcher  $\alpha$ ) drei gegebene Kreise senkrecht schneidet,  $\beta$ ) drei Kreise halbt,  $\gamma$ ) zwei derselben rechtwinklig schneidet und den dritten halbt.

10) Der Schnittpunkt der Höhen eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Potenzlinien der 3 über den Seiten als Durchmesser konstruierten Kreise.

11) Wenn zwei Kreise, welche sich schneiden, von einem dritten berührt werden, so treffen sich Tangenten der Berührungspunkte auf der gemeinsamen Sehne der Schnittkreise.

12) Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei Schnittkreise berührt und zwar den einen in einem bestimmten Punkte.

13) Jeder Punkt  $m$  auf der Potenzlinie eines Büschels von Kreisen  $K$  ist Mittelpunkt eines Kreises  $C$ , welcher die Kreise  $K$  rechtwinklig schneidet. Der Radius dieses Kreises  $C$  ist die gemeinsame Länge der Tangenten, welche von  $m$  an die Kreise  $K$  des Büschels gezogen sind.

14) Umgekehrt schneidet auch jeder Kreis  $K$  des Büschels alle Kreise  $C$  rechtwinklig. Die Tangenten, welche von dem Mittelpunkte des Kreises  $K$  an die Kreise  $C$  gezogen sind, sind dem Radius des Kreises  $K$  gleich.

15) Die Kreise  $C$  bilden einen Büschel, von welchem die Centrale der Kreise  $K$  Potenzlinie ist.

16) Wenn die Kreise  $K$  durch zwei feste Punkte gehen, so stellen dieselben Punkte zwei der Kreise  $C$  vor, welche zu Punkten zusammengeschumpft sind. Der Büschel der Kreise  $C$  bildet alsdann auf seiner Centralen eine involutorische Reihe mit Doppelpunkten und die Kreise dieses Büschels schneiden sich nicht.

17) Wenn die Kreise  $K$  sich nicht schneiden, so gehen die Kreise  $C$  durch zwei feste Punkte auf der Centralen der Kreise  $K$ . Diese Punkte sind die Doppelpunkte der durch die Kreise  $K$  auf ihrer Centralen gebildeten involutorischen Reihe.

18) Auf einer Geraden liegen 4 Punkte  $a, b, c, d$  hinter einander. Man soll einen Punkt  $m$  von der Art suchen, dass

$$\alpha) (ma) \cdot (mc) = (mb) \cdot (md), \quad \beta) (ma) \cdot (mb) = (mc) \cdot (md).$$

## IV. Abschnitt.

### Von den Kreispolaren.

#### § 94.\* Pol und Polare.

Es sei ein Kreis  $C$  gegeben (Fig. 114).

a) Wenn man einen beliebigen Punkt  $p$  mit dem Mittel- |  $\alpha$ ) Wenn man auf eine beliebige Gerade  $P$  aus dem



punkte durch eine Gerade verbindet und auf dem hierdurch bestimmten Durchmesser den 4. harmonischen Punkt  $m$  sucht, so heisst die in  $m$  errichtete Senkrechte  $P$  die Polare von  $p$ . Aus  $\alpha$ ) folgt, dass zugleich  $p$  der Pol von  $P$  ist.

**b)** Die Polare eines ausserhalb des Kreises gelegenen Punktes ist durch seine Berührungssehne dargestellt.

Die Polare eines Kreispunktes fällt mit seiner Tangente zusammen.

Die Polare eines innerhalb des Kreises gelegenen Punktes trifft den Kreis nicht.

Mittelpunkte eine Senkrechte fällt und auf dem hierdurch bestimmten Durchmesser den 4. harmonischen Punkt  $p$  sucht, so heisst  $p$  der Pol von  $P$ .

Aus a) folgt, dass zugleich  $P$  die Polare von  $p$  ist.

**$\beta$ )** Der Pol einer Sehne ist der Schnittpunkt ihrer Endtangente.

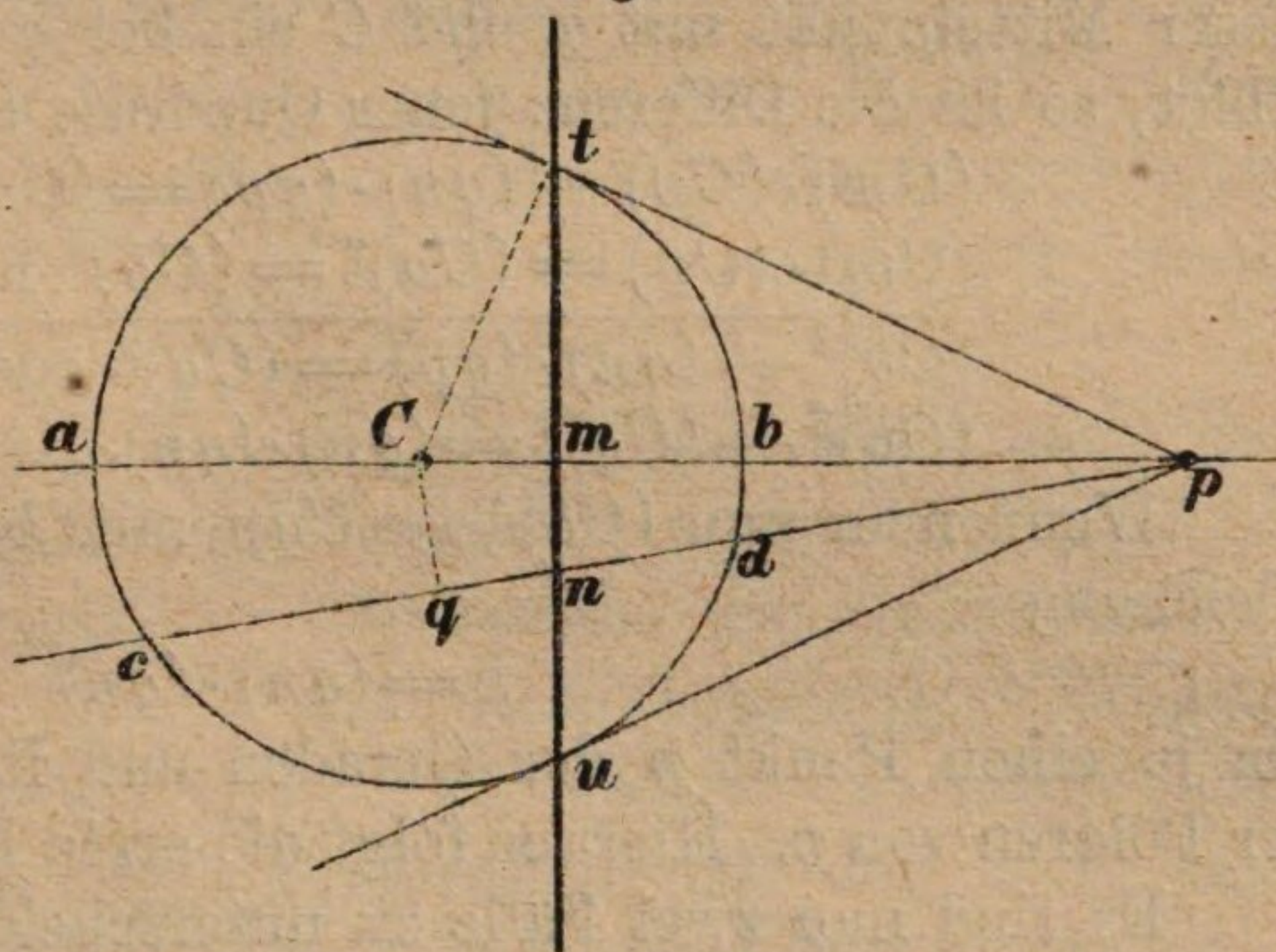
Der Pol einer Tangente fällt mit ihrem Berührungspunkte zusammen.

Der Pol einer Geraden, welche den Kreis nicht trifft, ist innerhalb des Kreises gelegen.

Beweis b) Die erste Behauptung folgt aus der Definition der Polaren, wenn man bedenkt, dass die Berührungssehne eines Punktes senkrecht auf dem Durchmesser desselben steht und nach § 70 c diesen Durchmesser harmonisch theilt. Die Polare des Kreispunktes  $b$  muss durch  $b$  selbst gehen, denn die Berührungssehne eines Punktes wird zur Tangente desselben, wenn der Punkt auf die Peripherie des Kreises zu liegen kommt. Ist endlich der Pol  $p$  innerhalb der Kreislinie gelegen, so ist der vierte harmonische Punkt  $m$  von dem Kreise ausgeschlossen (Fig. 114). Die Polare  $P$  liegt deshalb ausserhalb des Kreises.

Die Sätze  $\alpha$ ) sind nur andere Ausdrucksweisen der Sätze a).  
**Die Polaren der Punkte einer Geraden.**  
**a)** Die Punkte einer Geraden (welche den Kreis nicht

Fig. 113.



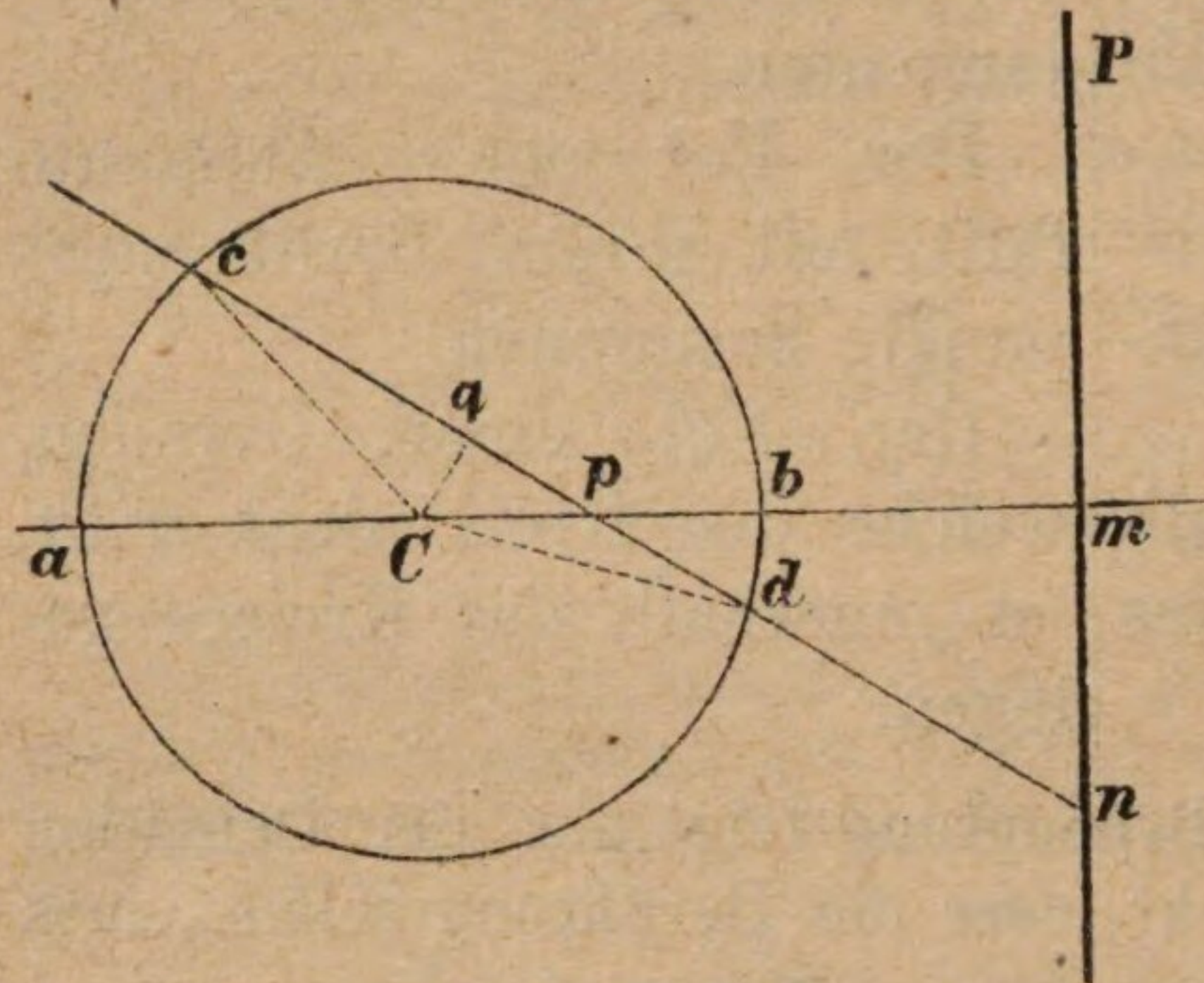


berührt) und die Schnittpunkte der zugehörigen Polaren mit derselben Geraden bilden die Punktpaare einer involutorischen Punktreihe.

Wenn die gegebene Gerade den Kreis in 2 Punkten trifft, so sind dieselben die Doppelpunkte der involutorischen Reihe. Wenn die gegebene Gerade den Kreis nicht trifft, so enthält die involutorische Reihe keine Doppelpunkte.

Beweis (Fig. 114).  $cd$  sei die gegebene Gerade und  $p$  ein beliebiger Punkt auf ihr.  $n$  sei der Schnittpunkt der Geraden mit der Polaren von  $p$  und  $Cq$  sei senkrecht auf  $cd$  gefällt. Da der

Fig. 114.



Winkel  $nmp$  recht ist, so liegen die Punkte  $n, m, p$  auf einem Kreise, dessen Durchmesser  $np$  ist.  $(Cm) \cdot (Cp)$  und  $(qn) \cdot (qp)$  sind die Potenzen der Punkte  $C$  und  $q$  in Bezug auf diesen Kreis. Die Differenz der Potenzen beider Punkte ist der Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von dem Mittelpunkte des Kreises  $nmp$  gleich (§ 83 d). Da

dieser Mittelpunkt mit  $q$  und  $C$  ein bei  $q$  rechtwinkliges Dreieck bildet, so ist die Differenz jener Quadrate  $(Cq)^2$  gleich.

$$\begin{aligned} (Cm) \cdot (Cp) - (qn) \cdot (qp) &= (Cq)^2 \\ (Cm) \cdot (Cp) &= (Ca)^2 = (Cb)^2 \text{ nach § 70 } \gamma. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Cb)^2 - (qn) \cdot (qp) &= (Cq)^2 \text{ oder} \\ (Cb)^2 - (Cq)^2 &= (qn) \cdot (qp). \end{aligned}$$

Wenn man nun  $(Cb)^2 - (Cq)^2$  mit  $k$  bezeichnet, so gilt die Gleichung

$$k = (qn) \cdot (qp)$$

für je einen Punkt  $p$  der Geraden und ihren Schnittpunkt  $n$  mit der Polaren von  $p$ . Hieraus folgt die erste Behauptung nach § 71 a.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden.

1)  $cd$  ist Secante, wie dies in der Figur vorausgesetzt wurde. In diesem Falle ist  $k = (cb)^2 - (Cq)^2 = (Cd)^2 - (Cq)^2 = (qd)^2 = (qc)^2$ , woraus folgt, dass  $d$  und  $c$  die Doppelpunkte der involutorischen Punktreihe sind.

2) Die gegebene Gerade trifft den Kreis nicht. Dann ist  $k$  negativ und die involutorische Punktreihe hat keine Doppelpunkte.

Zusatz. Wenn die gegebene Gerade den Kreis berührt,



so zerfällt die involutorische Punktreihe, indem alsdann die Polare eines jeden Punktes dieser Tangente durch den Berührungspunkt geht (§ 94 b).

**Conjugirte Punkte.**

§ 96.\*

a) Wenn die Polare des Punktes  $p$  durch den Punkt  $q$  geht, so geht auch die Polare von  $q$  durch  $p$ .

$\alpha$ ) Zwei Punkte  $p$  und  $q$  heissen conjugirt in Bezug auf einen Kreis, wenn die Polare jedes Punktes durch den andern geht.

Beweis von a). Es sind 2 Fälle zu unterscheiden. 1) Wenn die Gerade  $pq$  den Kreis nicht berührt, so bilden die Punkte dieser Geraden und die zugehörigen Polaren auf  $pq$  eine involutorische Reihe, in welcher die Punkte  $p$  und  $q$  einander zugeordnet sind. Würde nun  $pq$  durch die Polare von  $q$  nicht in  $p$ , sondern in  $m$  geschnitten, so wären  $q$  und  $m$  auch zugeordnete Punkte, das heisst, der Punkt  $q$  würde sowohl mit  $p$  als auch mit  $m$  ein Paar zugeordneter Punkte derselben involutorischen Reihe bilden, was unmöglich ist (§ 71 a).

2) Wenn  $pq$  Tangente ist, so muss nach § 95, Zusatz,  $q$  der Berührungspunkt dieser Tangente sein. Dann fällt aber die Polare von  $q$  mit dieser Tangente zusammen und geht desshalb durch  $p$ , was zu beweisen war.

**Lehrsätze über conjugirte Punkte.**

§ 97.\*

a) Je zwei conjugirte Punkte einer Secante theilen dieselbe harmonisch.

$\alpha$ ) Je zwei Punkte, welche eine Secante harmonisch theilen, sind conjugirte Punkte derselben.

b) Alle Punkte einer Tangente sind dem Berührungspunkt derselben conjugirt.

$\beta$ ) Wenn zwei Punkte einer Geraden einem dritten Punkt derselben conjugirt sind, so ist diese Gerade eine Tangente.

c) Der geometrische Ort aller Punkte, welche einem gegebenen Punkte conjugirt sind, ist die Polare des Punktes (§ 96 a und  $\alpha$ ).

$\gamma$ ) Allen Punkten einer Geraden ist der Pol dieser Geraden conjugirt (§ 96 a und  $\alpha$ ).

**Sätze über Pole und Polaren.**

§ 98.\*

a) Die Polaren aller Punkte einer Geraden  $P$  gehen durch den Pol  $p$  dieser Geraden.

$\alpha$ ) Die Pole aller Geraden eines Punktes  $q$  liegen auf der Polare  $P$  dieses Punktes.



Die Punkte der Geraden  $P$  sind dem Pole  $p$  conjugirt (§ 97  $\gamma$ ). Ihre Polaren gehen also durch diesen Pol  $p$  (§ 96  $\alpha$ ).

**b)** Wenn die Eckpunkte eines vollständigen Vierecks auf einem Kreise liegen, so bilden die Nebenecken desselben ein Polardreieck, d. h. ein Dreieck, dessen Seiten die Polaren der gegenüberliegenden Ecken sind.

Beweis a) Wenn die Eckpunkte  $a', a'', b', b''$  des vollständigen Vierecks in Fig. 89 auf einem Kreise liegen, so ist die Secante  $a'a''$  in  $b$  und  $c$  und die Secante  $b'b''$  in  $a$  und  $c$  durch die Gerade  $c'c''$  harmonisch getheilt (§ 72  $\beta$ );  $c'c''$  ist folglich die Polare von  $c$  (§ 97  $\alpha$ ). Der Beweis von  $\beta$ ) ergibt sich hieraus leicht.

**c)** Zu einem gegebenem Punkte die Polare ohne Hülfe des Zirkels zu finden.

Die Auflösung ergibt sich unmittelbar aus  $\beta$ ).

Die Pole der durch  $p$  gehenden Geraden sind dem Punkte  $p$  conjugirt (§ 97  $\gamma$ ). Sie liegen also auf der Polaren desselben (§ 97  $c$ ).

**$\beta$ )** Wenn man durch einen Punkt beliebig viele Secanten eines Kreises zieht und die Schnittpunkte je zweier Secanten kreuzweise verbindet, so liegen die erhaltenen Punkte auf der Polaren des gegebenen Punktes.

**$\gamma$ )** Zu einer gegebenen Geraden den Pol ohne Hülfe des Zirkels zu finden.

Man suche die Polaren zweier Punkte dieser Geraden. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Pol.

### § 99.\* Reciproke Figuren.

Wenn in der Ebene eines Kreises sich eine Figur  $F$  befindet und man denkt zu jedem ihrer Punkte die Polare, zu jeder Geraden den Pol in Bezug auf diesen Kreis bestimmt, so entsteht eine andere Figur  $F'$ . Die Beziehungen zwischen  $F$  und  $F'$ , welche aus den letzten Lehrsätzen folgen, sind die nachstehenden:

Den Punkten einer Geraden in  $F$  entsprechen die Geraden eines Punktes in  $F'$ . Einem vollständigen  $n$ -Eck mit seinen Seiten in  $F$  entspricht in  $F'$  ein vollständiges  $n$ -Seit mit seinen Ecken. Den Punkten einer Curve  $C$  in  $F$  entsprechen die Tangenten einer Curve  $C'$  in  $F'$ . Einer Sehne in  $C$  entspricht der Schnittpunkt zweier Tangenten in  $C'$ . Jedem Satze über die Lagenverhältnisse in der einen Figur entspricht ein reciproker Satz in der andern. Figuren dieser Art werden reciproke Figuren genannt.



Uebungen.

§100.\*

1) Alle Kreise, in Bezug auf welche  $p$  und  $P$  Pol und Polare sind, bilden einen Büschel.

2) Einen Kreis so zu zeichnen, dass  $p$  und  $P$  Pol und Polare in Bezug auf denselben sind und dass dieser Kreis

- $\alpha$ ) seinen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden hat,
- $\beta$ ) durch einen gegebenen Punkt geht,
- $\gamma$ ) einen gegebenen Radius hat (§ 85, 15),
- $\delta$ ) eine gegebene Gerade berührt.

3) Einen Kreis so zu zeichnen, dass  $p$  und  $P$  Pol und Polare sind und dass die Polare von  $p'$  einer gegebenen Geraden parallel ist.

4) Ein Punkt  $p$  innerhalb und eine Gerade  $G$  ausserhalb eines Kreises ist gegeben. Man soll

$\alpha$ ) einen Punkt auf  $G$  suchen, so dass die Polare desselben durch  $p$  geht.

$\beta$ ) eine Gerade durch  $p$  so ziehen, dass ihr Pol auf  $G$  liegt.

5) Welches ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, in welchen die Verbindungslinien der Punkte einer gegebenen Geraden mit dem Mittelpunkte von den Polen dieser Punkte getroffen werden?

6) Der Pol jedes Durchmessers ist ein unendlich ferner Punkt.

7) Die Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

8) Die Gesamtheit aller unendlich fernen Punkte der Ebene ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche dem Mittelpunkte conjugirt sind. (Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade.)

9) Wenn man auf jedem von zwei Durchmessern ein Paar conjugirter Punkte bestimmt, so liegen diese Punkte auf einem Kreise.

10) Ein Kreis  $K$ , welcher einen Durchmesser eines gegebenen Kreises  $K'$  in conjugirten Punkten schneidet, trifft auch jeden andern Durchmesser von  $K'$  in conjugirten Punkten.

11) Der Kreis  $K$  in 10) schneidet den gegebenen Kreis  $K'$  rechtwinklig.

12) Wenn zwei Kreise einander rechtwinklig schneiden, so wird jede Secante der Kreise, welche durch den Mittelpunkt von einem der beiden Kreise geht, von diesen Kreisen in vier harmonischen Punkten geschnitten.

13) Schneiden sich zwei Kreise rechtwinklig, so ist die gemeinsame Sehne derselben die Polare eines jeden der Mittelpunkte in Bezug auf den andern Kreis.

14) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen Punkt geht und zwei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet.

15) Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht, eine gegebene Gerade berührt und einen gegebenen Kreis rechtwinklig schneidet.



## V. Abschnitt.

## Aehnlichkeit der Kreise. Kreisberührungen.

## § 101.\* Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise.

a) Zwei Kreise können als ähnliche Figuren betrachtet werden, welche in perspectivischer Lage sind und einen äussern Aehnlichkeitspunkt haben. Derselbe theilt den Centralabstand ausserhalb nach dem Verhältniss der Radien.

α) Zwei Kreise können als ähnliche Figuren betrachtet werden, welche in perspectivischer Lage sind und einen innern Aehnlichkeitspunkt haben. Derselbe theilt den Centralabstand innerhalb nach dem Verhältniss der Radien.

Fig. 115.

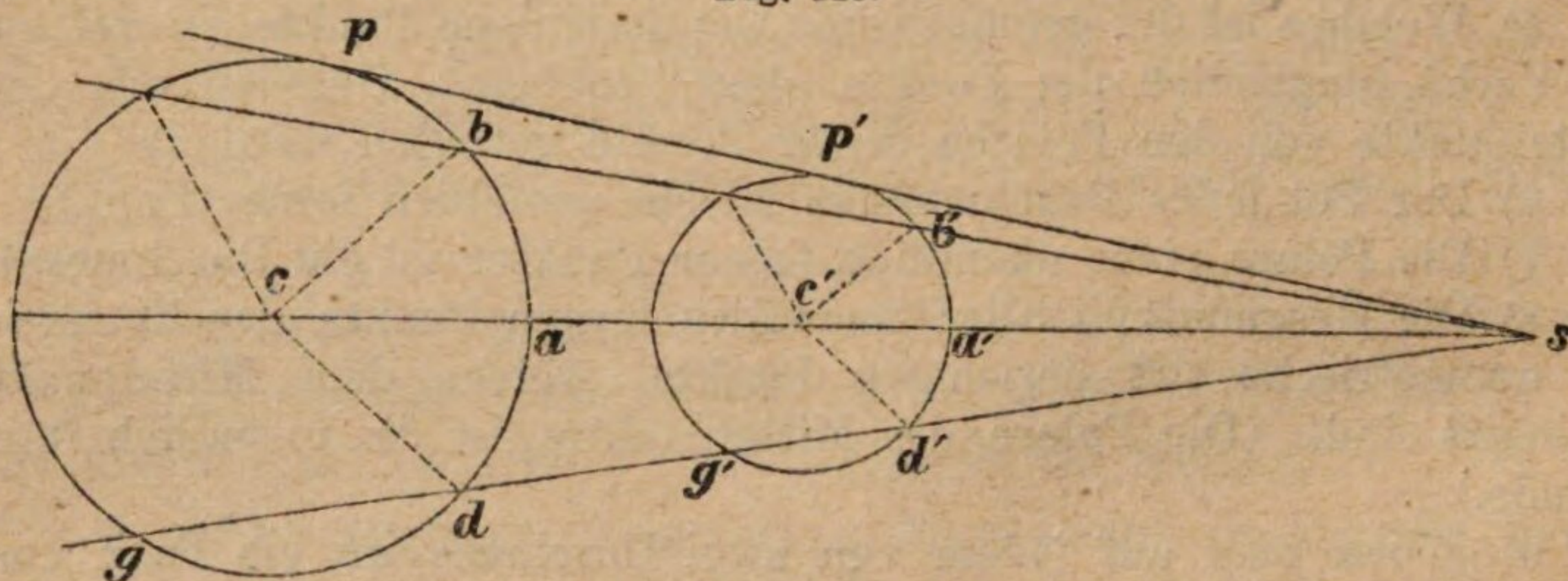
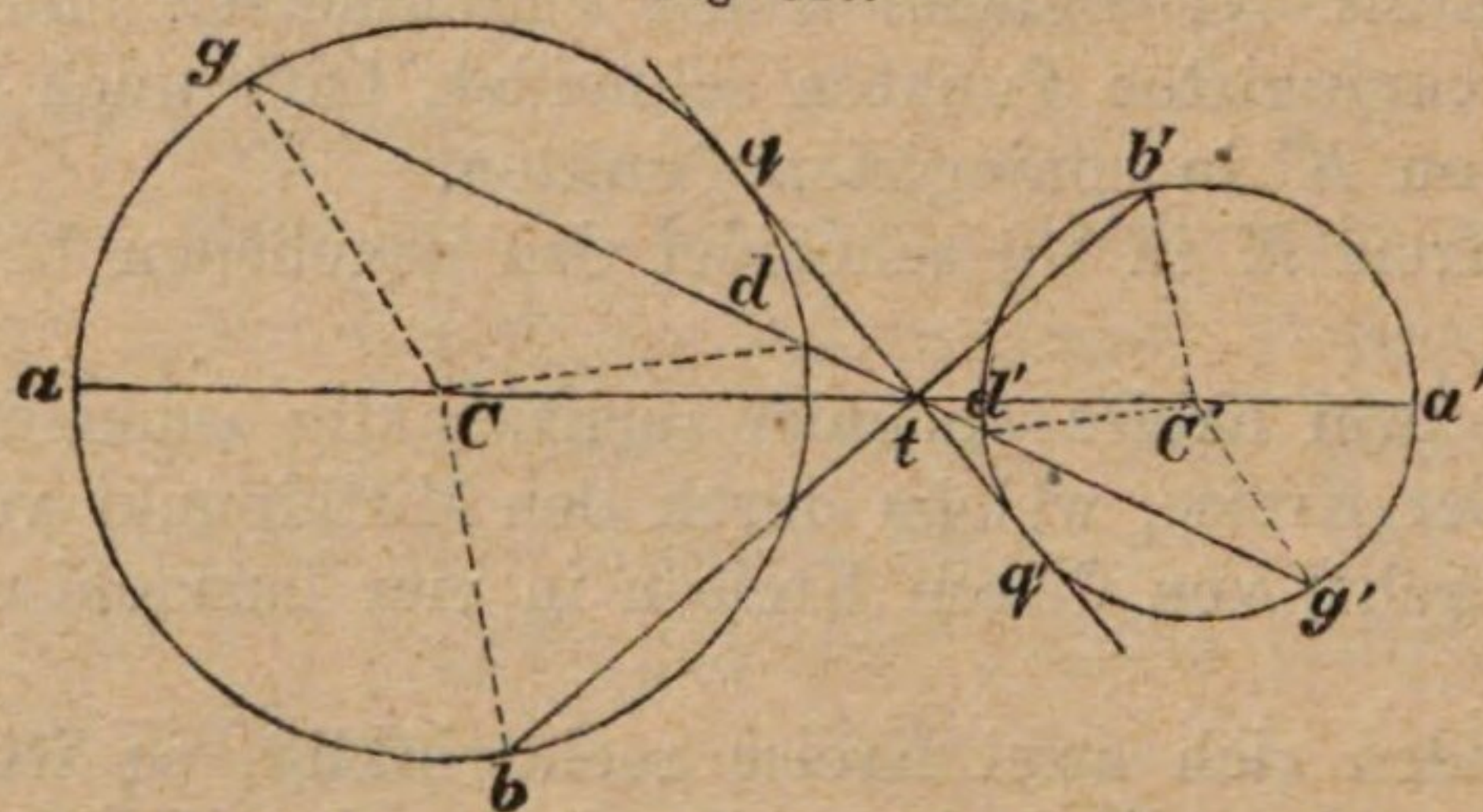


Fig. 116.



## Beweise.

Wenn  $b, b'$  (Fig. 115) die Endpunkte paralleler Radien von gleicher Richtung sind und die Centrale  $cc'$  von  $bb'$  in  $s$  geschnitten wird, so hat man (§ 63 a)  $(sc):(sc') = (bc):(b'c')$ .

Die Punkte  $b$  und  $b'$  liegen also auf einem Strahle eines

Wenn (Fig. 116)  $b, b'$  die Endpunkte paralleler Radien von entgegengesetzter Richtung sind und die Centrale  $cc'$  von  $bb'$  in  $t$  geschnitten wird, so hat man (§ 63 a)  $(tc):(tc') = (bc):(b'c')$ .

Die Punkte  $b$  und  $b'$  liegen also auf einem Strahle eines



Strahlenbüschels, welcher den Abstand  $cc'$  aussen nach dem Verhältniss der Radien theilt. Hieraus und aus der Proportion  $(sb) : (sb') = (cb) : (c'b')$  ergibt sich die Behauptung (§ 86 a und b).

Strahlenbüschels, welcher den Abstand  $cc'$  innen nach dem Verhältniss der Radien theilt. Hieraus und aus der Proportion  $(tb) : (tb') = (cb) : (c'b')$  ergibt sich die Behauptung (§ 86 a und b).

### Zusätze.

b) Wenn die Kreise sich von innen oder von aussen berühren, so ist ihr Berührungspunkt bezüglich innerer oder äusserer Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

β) Wenn der Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise auf einem dieser Kreise liegt, so berühren sich die Kreise in diesem Punkte (Beweis indirect).

c) Die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise theilen die Centrale harmonisch.

### Aehnliche Systeme zweier Kreise.

§ 102.\*

Wenn zwei Kreise als entsprechende Figuren zweier ähnlicher und perspectivisch gelegener Systeme (§ 88) angesehen werden, so ergeben sich folgende Beziehungen.

a) Die Mittelpunkte sind homologe Punkte, sowohl für den äussern als für den innern Aehnlichkeitspunkt.

α) Die Centrale ist ein Aehnlichkeitsstrahl, sowohl für den äussern als für den innern Aehnlichkeitspunkt.

b) Parallele Radien, ihre Endpunkte und die Tangenten in diesen Punkten entsprechen sich entweder für den äussern oder für den innern Aehnlichkeitspunkt. Im ersten Falle sind die Radien von gleicher, im letzten Falle von entgegengesetzter Richtung (§ 101 a und α).

β) Parallele Tangenten, ihre Berührungspunkte und diejenigen Tangentenabschnitte, welche von den Berührungspunkten bis zur Centralen reichen, entsprechen sich entweder für den äussern oder für den innern Aehnlichkeitspunkt. Im ersten Falle sind diese Abschnitte von gleicher, im letzten Falle von entgegengesetzter Richtung.

c) Auf einem äussern Aehnlichkeitsstrahl, welcher die Kreise trifft, liegen 4 Kreispunkte, welche zusammen-

γ) Mit jeder Richtung gehen 4 Tangenten parallel. Dieselben können zusammengefasst werden 1) in zwei Paare



gefasst werden können 1) in zwei Paare entsprechender Punkte und 2) in zwei Paare von Punkten, welche sich nicht entsprechen und inverse Punkte genannt werden. Analoges lässt sich von einem innern Ähnlichkeitsstrahl aussagen.

d) Wenn ein Ähnlichkeitsstrahl den einen der beiden Kreise berührt, so berührt er auch den andern (c).

e) Wenn zwei Punkte in den ähnlichen Systemen zweier Kreise homolog sind, so sind es auch ihre Polaren.

von solchen Tangenten, welche sich für den äussern Ähnlichkeitspunkt entsprechen und 2) in zwei Paare von solchen Tangenten, welche sich für den innern Ähnlichkeitspunkt entsprechen.

δ) Eine gemeinsame Tangente beider Kreise muss durch den äussern oder innern Ähnlichkeitspunkt der Kreise gehen.

ε) Wenn zwei Gerade in den ähnlichen Systemen zweier Kreise homolog sind, so sind es auch ihre Pole.

#### Beweise.

e) Wenn sich zwei Punkte entsprechen, so entsprechen sich auch die durch sie gezogenen Durchmesser beider Kreise und auf denselben die den gegebenen Punkten zugeordneten vierten harmonischen Punkte (§ 87 ε und Definition ähnlicher Punkt-reihen). Ferner entsprechen sich die in den gefundenen Punkten auf beiden Durchmessern errichteten Senkrechten, welche eben die Polaren der gegebenen Punkte sind.

ε) Wenn sich zwei Gerade entsprechen, so entsprechen sich auch die auf ihnen senkrechten Durchmesser beider Kreise und ihre Schnittpunkte mit den gegebenen Geraden. Ferner entsprechen sich diejenigen Punkte, welche auf den beiden Durchmessern zu den gefundenen Schnittpunkten harmonisch liegen. Dieselben sind aber die Pole der gegebenen Geraden.

#### § 103.\* Aufgaben.

a) Einen Kreis zu zeichnen, der eine Gerade  $A$  in einem gegebenen Punkte  $m$  und ausserdem einen Kreis  $K'$  berührt. (2 Auflösungen.)

Auflösung (man zeichne die Figur selbst). Man ziehe eine zu  $A$  parallele Tangente  $A'$  des Kreises  $K'$ . Ihr Berührungspunkt sei  $m'$ . Die Gerade  $mm'$  schneidet den Kreis  $K'$  zum zweiten Male in dem Berührungspunkte  $s$  des gesuchten Kreises. Man constru-  
ire nun den Kreis nach § 33 e. \*)

\*) Anmerkung:  $m'$  wird am kürzesten durch einen zu  $A$  senkrechten Durchmesser gefunden.



Beweis. Der Punkt  $s$  als Aehnlichkeitspunkt und die Punkte  $m'$  und  $m$  bestimmen zwei ähnliche Systeme in perspectivischer Lage (§ 88 a). In diesen Figuren entsprechen sich auch die Geraden  $A'$  und  $A$  (§ 87  $\gamma$ ). Dem Kreise  $K'$ , welcher die Gerade  $A'$  in  $m'$  berührt, entspricht in der andern Figur ein Kreis  $K$ , welcher  $A$  in  $m$  berührt (§ 87  $f$  und  $\varphi$ ). Die Kreise  $K$  und  $K'$  berühren sich nach § 101  $\beta$  in  $s$ . Die zweite zu  $A$  parallele Tangente von  $K'$  liefert einen zweiten Kreis, welcher der Aufgabe genügt.

b) Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Gerade  $A$  und  $B$  und einen Kreis  $K'$  berührt. (8 Auflösungen.)

Auflösung (man zeichne die Figur selbst).  $p$  sei der Schnittpunkt von  $A$  und  $B$ . Man ziehe zwei Tangenten  $A'$  und  $B'$  des Kreises  $K'$ , welche bezüglich mit  $A$  und  $B$  parallel sind und deren Schnittpunkt  $p'$  sein möge. Wenn der Kreis  $K'$  von der Geraden  $pp'$  in  $s$  und  $t$  geschnitten wird, so sind  $s$  und  $t$  Berührungspunkte von zwei Kreisen, welche der Aufgabe genügen.

Beweis. Der Punkt  $s$  als Aehnlichkeitspunkt und die Punkte  $p'$  und  $p$  als entsprechende Punkte bestimmen zwei ähnliche Systeme, in welchen  $A'$  und  $A$ ,  $B'$  und  $B$  zwei Paare entsprechender Geraden sind. Dem Kreis  $K'$  der einen Figur, welcher von  $A'$  und  $B'$  berührt wird, entspricht in der andern Figur ein Kreis  $K$ , welcher von den entsprechenden Geraden  $A$  und  $B$  berührt wird (§ 87  $f$  und  $\varphi$ ). Ausserdem berühren sich die beiden Kreise nach § 101  $\beta$  in  $s$ . Ebenso wird der Beweis für den Punkt  $t$  geführt. Die 4 zu  $A$  oder  $B$  parallelen Tangenten von  $K'$  bilden ein Parallelogramm, von welchem  $p'$  ein Eck ist. Die andern drei Ecken führen auf drei weitere Paare von Kreisen. Doch können einzelne derselben wegfallen, wenn der gegebene Kreis von den betreffenden Geraden nicht getroffen wird.

### Inverse Punkte. — Aufgaben.

§ 104.\*

|                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) Zwei Paare von Punkten, welche für den äussern (innern) Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise $C$ und $C'$ invers sind, liegen immer auf einem Kreise $K$ oder auf einem Aehnlichkeitsstrahle (Fig. 117). | $\alpha$ ) Zwei in Bezug auf den äussern (innern) Aehnlichkeitspunkt inverse Punkte und ihre Tangenten sind immer Punkte und Tangenten eines Kreises $K$ ( $C$ und $C'$ werden von $K$ berührt). |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Beweis a).  $b$  und  $a'$ ,  $c$  und  $d'$  sind zwei Paare von Punkten, welche für den äussern Aehnlichkeitspunkt invers sind. Um das



Viereck  $ba'd'c$  lässt sich ein Kreis beschreiben, weil in demselben je zwei gegenüberliegende Winkel zusammen  $180^\circ$  betragen (Umkehrung von 38 a), wie man leicht durch die Gleichheit der Winkel  $abc$  und  $a'd'c'$ ,  $bcd$  und  $b'a'd'$ , welche Peripheriewinkel über homologen Bogen sind, erweist.

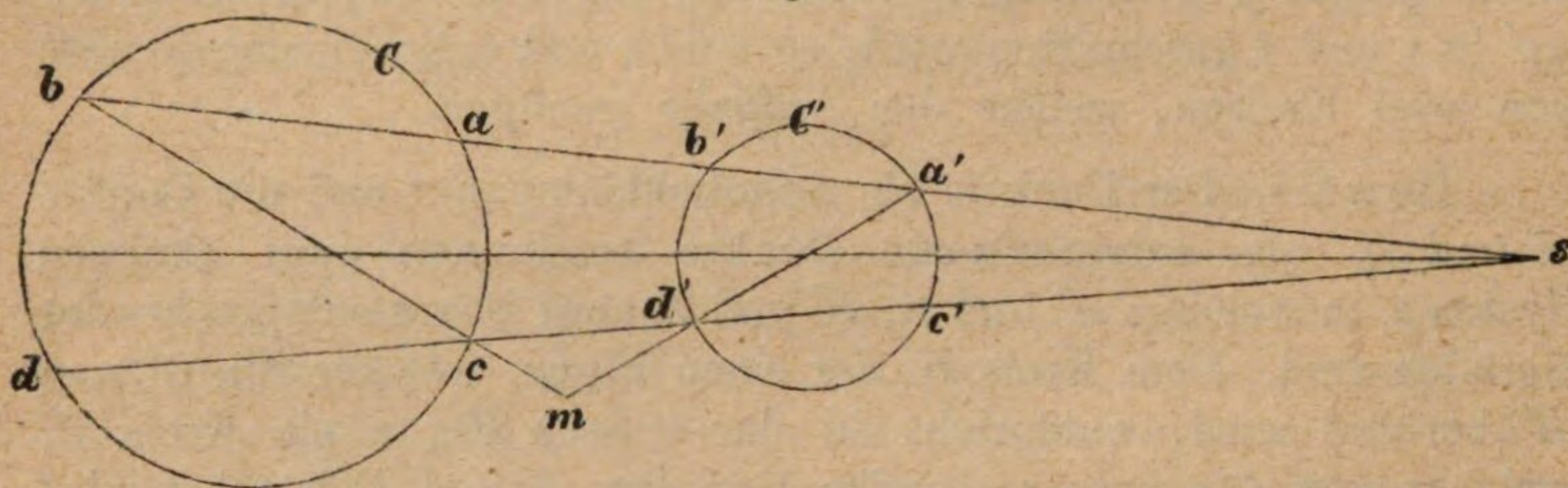
Um  $\alpha$ ) zu beweisen, lasse man nur die beiden Punkte des Kreises  $C$  zusammenfallen, wodurch auch die beiden inversen Punkte in einen einzigen zusammenfallen und die inversen Sehnen zu Tangenten inverser Punkte werden.

**b)** Zwei inverse Sehnen schneiden sich auf der Potenzlinie der beiden Kreise.

**$\beta$ )** Zwei inverse Tangenten schneiden sich auf der Potenzlinie der beiden Kreise.

Beweis (Fig. 117.) Die inversen Sehnen  $bc$  und  $a'd'$  (die inversen Tangenten) sind die Potenzlinien des Kreises  $K$  (§ 104 a)

Fig. 117.



einerseits und der Kreise  $C, C'$  andererseits. Sie treffen sich also in dem Potenzpunkte der 3 Kreise  $K, C, C'$ , welcher auf der Potenzlinie von  $C$  und  $C'$  gelegen ist.

#### Aufgabe.

**c)** Wenn der äussere (innere) Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise gegeben ist, so soll man seine Polaren in beiden Kreisen, sowie die Potenzlinie dieser Kreise mit dem Lineal allein construiren.

**$\gamma$ )** Wenn die Potenzlinie zweier Kreise gegeben ist, so soll man die Aehnlichkeitspunkte und ihre Polaren mit dem Lineal allein construiren.

#### Auflösung.

Durch die Centrale und einen äussern Aehnlichkeitsstrahl kann man nach § 98 c die Polaren des äussern Aehnlichkeitspunktes in beiden Kreisen construiren. Durch die Schnittpunkte der Centralen

Die Verbindungslinien zweier für den äussern Aehnlichkeitspunkt inverser Punkte der Centralen mit irgend einem Punkte der Potenzlinie sind inverse Sehnen und führen zu einem



und des Aehnlichkeitsstrahles mit den beiden Kreisen erhält man aber auch inverse Sehnen, welche sich auf der gesuchten Potenzlinie schneiden.

weitere Paare inverser Punkte. Die Verbindungslinie derselben ist ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl, dessen Schnittpunkt mit der Centralen den äussern Aehnlichkeitspunkt darstellt.

**d) Aufgabe.** Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise berührt und zwar den einen in einem gegebenen Punkte. (2 Auflösungen.)

**Auflösung.** Man ziehe durch den gegebenen Punkt  $c$  (Fig. 118) einen äusseren Aehnlichkeitsstrahl der gegebenen Kreise  $C$  und  $C'$ . Der Punkt  $d'$  dieses Strahles, welcher dem gegebenen Berührungspunkte invers ist, stellt den gesuchten Berührungspunkt auf dem zweiten gegebenen Kreise dar ( $\alpha$ ). Die Radien der Punkte  $c$  und  $d'$  schneiden sich in dem Mittelpunkte des gesuchten Kreises. Einen zweiten Kreis findet man vermittelst des inneren Aehnlichkeitsstrahles, welcher durch den gegebenen Berührungspunkt gezogen ist.

### Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise.

§ 105.\*

**a)** Drei Kreise geben 6 Aehnlichkeitspunkten den Ursprung. Die 3 äussern Aehnlichkeitspunkte liegen auf einer Geraden. Desgleichen liegt je ein äusserer Aehnlichkeitspunkt mit den beiden innern, welche ihm nicht zugehören, auf einer Geraden.

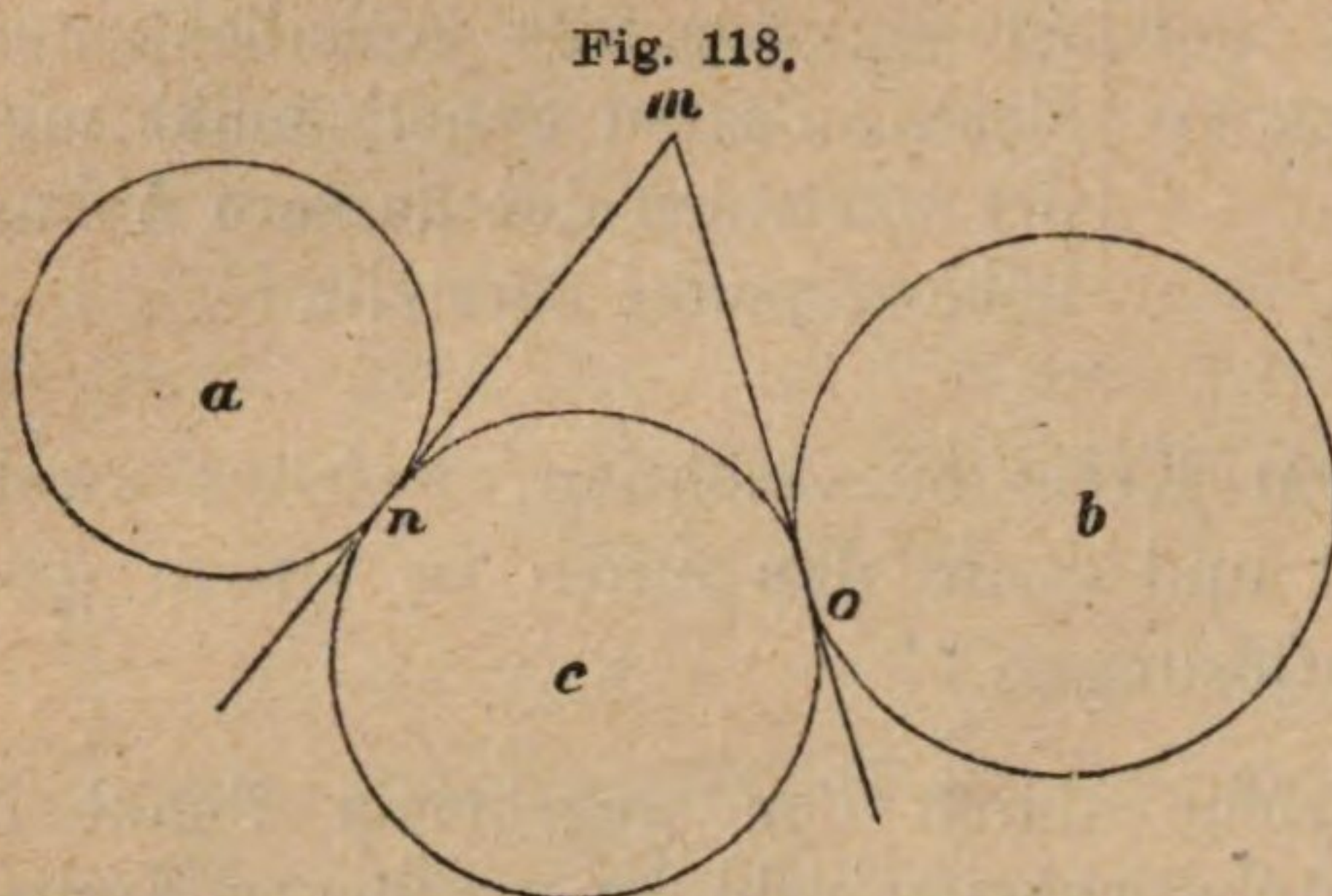
**Beweis.**  $r, r', r''$  seien die Radien der 3 Kreise und  $a, b, c$  ihre Mittelpunkte (Fig. 89). Die Abstandsverhältnisse der äusseren Aehnlichkeitspunkte  $a''b''c''$  in Bezug auf die Ecken des Dreiecks  $abc$  (§ 72) haben die Werthe  $\frac{r''}{r'}, \frac{r'}{r}, \frac{r}{r''}$ . Das Product dieser Abstandsverhältnisse ist daher dem positiven Werthe der Einheit gleich und die Punkte  $a'', b'', c''$  liegen nach § 72  $\alpha$  auf einer Geraden.

Hieraus folgt durch Anwendung von § 101 c, § 68, Anmerk. und § 72  $\alpha$  der zweite Theil der Behauptung.

**b)** Wenn zwei Kreise von einem dritten gleichartig (ungleichartig) berührt werden, so ist die Berührungssehne ein äusserer (innerer) Aehnlichkeitsstrahl der beiden Kreise und die Berührungspunkte sind inverse Punkte.



Beweis (Fig. 119). Bei gleichartiger Berührung der Kreise  $a$  und  $b$  durch den Kreis  $c$  sind die Berührungspunkte  $n$  und  $o$



entweder innere (bei der ausschliessenden Berührung) oder äussere (bei der einschliessenden Berührung) Ähnlichkeitspunkte des Kreises  $c$  mit  $a$  und  $b$ . Die Gerade  $no$  geht also nach a) durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt von  $a$  und  $b$ . Analog wird der Beweis

für eine ungleichartige Berührung geführt. Die Punkte  $n$  und  $o$  sind jedoch invers, denn ihre Tangenten sind nicht parallel. (Sie schneiden sich auf der Potenzlinie der beiden Kreise.)

#### § 106.\* Sätze über Kreisberührungen.

a) Wenn jeder von zwei Kreisen  $C$  und  $C'$  durch die Kreise  $K$  und  $K'$  gleichartig (ungleichartig) berührt wird, so ist die Potenzlinie von  $C$  und  $C'$  ein äusserer (innerer) Ähnlichkeitsstrahl von  $K$  und  $K'$ .

Beweis. Wenn der Kreis  $C$ , sowie  $C'$ , durch  $K$  und  $K'$  von aussen berührt wird (in den Punkten  $a, c$  und  $b', d'$  von Fig. 118, wo jedoch die Kreise  $K$  und  $K'$  nicht gezeichnet sind) oder, wenn diese Berührung von innen stattfindet (in  $b, d$  und  $a', c'$ ) oder, wenn  $C$  durch die Kreise  $K$  und  $K'$  von aussen und  $C'$  durch sie von innen berührt wird, oder endlich, wenn  $C$  durch  $K$  und  $K'$  von innen und  $C'$  durch dieselben von aussen berührt wird, so gehen in allen diesen Fällen nach § 105 b die Berührungssehnens von  $C$  und  $C'$  durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt von  $K$  und  $K'$ . Dieselben Berührungssehnens sind aber nach § 105 b inverse Sehnen der Kreise  $C$  und  $C'$  für den äusseren oder inneren Ähnlichkeitspunkt derselben, je nachdem man die beiden ersten oder die beiden letzten der aufgezählten Fälle im Auge hat. Diese Berührungssehnens schneiden sich also nach § 104 b auch auf der Potenzlinie von  $C$  und  $C'$ , womit die Behauptung bewiesen ist. Für eine ungleichartige Berührung der Kreise  $C$  und  $C'$  durch  $K$  und  $K'$  beweist man den Satz auf analoge Art.

b) Wenn ein Kreis  $K$  zwei Kreise  $C$  und  $C'$  gleichartig (ungleichartig) berührt, so ist die Potenzlinie von  $C$  und  $C'$  eine Gerade des Kreises  $K$ , welche jeder Polaren des äusseren (inneren) Ähnlichkeitspunktes in  $C$  und  $C'$  entsprechend ist.



Beweis (Fig. 117.) Wenn  $c$  und  $d'$  die Berührungspunkte von  $K$  mit  $C$  und  $C'$  sind, so geht nach § 105 b die Berührungssehne  $cd'$  durch den äussern Aehnlichkeitspunkt von  $C$  und  $C'$ . In den ähnlichen Figuren, welche durch die Kreise  $C$  und  $K$  und den Punkt  $c$  als Aehnlichkeitspunkt bestimmt sind, ist  $cd'$  eine sich selbst entsprechende Gerade. Folglich entsprechen sich auch die Pole dieser Geraden in Bezug auf  $K$  und  $C$ , von denen der erstere nach § 104  $\beta$  auf der Potenzlinie von  $C, C'$  und der zweite nach § 98  $\alpha$  auf der Polaren des äussern Aehnlichkeitspunktes dieser Kreise gelegen ist. Jene Potenzlinie und diese Polare entsprechen sich also als parallele Gerade, welche durch entsprechende Punkte gehen.

Anmerkung. Da es nur einen Kreis gibt, der mit  $C$  (Fig. 117) den Punkt  $c$  zum Aehnlichkeitspunkt hat, wenn zugleich in beiden Kreisen zwei gegebene Geraden sich entsprechen sollen (§ 88 a), so kann der Satz a) auch umgekehrt werden.

### Aufgaben.

§ 107.\*

a) Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei Kreise  $C, C'$  gleichartig (ungleichartig) und ausserdem noch eine gegebene Gerade  $A$  berührt.

Auflösung. Man bestimme den Schnittpunkt ( $h$ ) der Geraden  $A$  mit der Potenzlinie  $P$  von  $C$  und  $C'$ ; ausserdem ziehe man an den Kreis  $C$  eine mit  $A$  parallele Tangente ( $B$ ) und in demselben Kreise die Polare ( $Q$ ) des äussern Aehnlichkeitspunktes von  $C$  und  $C'$ . Diese beiden letzteren Geraden mögen sich in einem Punkte  $g$  schneiden. Wenn nun die Gerade  $hg$  den Kreis  $C$  trifft, so sind die so erhaltenen Punkte ( $s$  und  $t$ ) Berührungspunkte von zwei Kreisen, welche der Aufgabe genügen.

Man denke sich denjenigen Kreis  $K$  construirt, welcher mit dem Kreise  $C$  den Punkt  $s$  zum Aehnlichkeitspunkte hat, so dass ausserdem  $P$  und  $Q$  entsprechende Gerade in den ähnlichen Systemen beider Kreise sind. Alsdann muss der Kreis  $K$  den Kreis  $C$  in  $s$  berühren (§ 101  $\beta$ ). Es entsprechen sich in diesen Kreisen aber auch  $h$  und  $g$ ,  $A$  und  $B$  (§ 87 c und  $\gamma$ ).  $A$  muss also den Kreis  $K$  berühren, weil  $B$  den Kreis  $C$  berührt. Ausserdem muss nach § 106 b, Anmerkung,  $K$  auch den Kreis  $C'$  gleichartig berühren.

Anmerkung. Indem man die zweite zu  $A$  parallele Tangente des Kreises  $C$  benutzt, erhält man ein weiteres Paar von Kreisen. Wird eine ungleichartige Berührung verlangt, so ist die Construction analog, nur wird der innere Aehnlichkeitspunkt von  $C$  und  $C'$  verwendet. Man erhält also im Ganzen 8 Kreise, welche  $C, C'$  und  $A$  berühren.



**b) Aufgabe.** Kreise zu zeichnen, welche drei gegebene Kreise berühren.

**Auflösung** (man zeichne die Figur selbst).  $C^1, C^2, C^3$  seien die 3 Kreise.  $P^{12}$  sei die Potenzlinie der Kreise  $C^1$  und  $C^2$ ,  $P^{32}$  diejenige der Kreise  $C^3$  und  $C^2$ .  $Q^{12}$  sei die Polare des äussern Aehnlichkeitspunktes von  $C^1$  und  $C^2$  in Bezug auf den Kreis  $C^2$ .  $Q^{32}$  sei die Polare des äusseren Aehnlichkeitspunktes von  $C^3$  und  $C^2$  in Bezug auf den Kreis  $C^2$ .

Wenn die Gerade, welche den Schnittpunkt  $p$  der beiden Potenzlinien mit dem Schnittpunkte  $q$  der beiden Polaren verbindet, den Kreis  $C^2$  in zwei Punkten  $s$  und  $t$  trifft, so sind diese Punkte Berührungspunkte von zwei Kreisen, welche der Aufgabe genügen. Die Kreise selbst können nach § 104 d construiert werden.

**Beweis.** Man denke sich denjenigen Kreis  $K$  construiert, welcher mit  $C^2$  den Punkt  $s$  zum Aehnlichkeitspunkte hat, so dass ausserdem die Geraden  $P^{12}$  und  $Q^{12}$  in diesen Kreisen entsprechende Geraden sind. Nach § 101  $\beta$  müssen sich  $K$  und  $C^2$  in  $s$  berühren und aus § 106 b, Anmerkung, folgt, dass auch  $C^1$  von  $K$  berührt wird. In den beiden ähnlichen Systemen sind aber auch die Punkte  $p$  und  $q$ , sowie die Geraden  $P^{32}$  und  $Q^{32}$  homolog (§ 87 c und  $\gamma$ ) und daher folgt aus § 106 b, Anmerkung, dass auch  $K$  und  $C^3$  sich berühren.

**Anmerkung.** Es ist leicht zu sehen, dass man immer das gleiche Paar von Kreisen erhält, wenn man mit irgend zwei Aehnlichkeitspunkten einer Aehnlichkeitsaxe operirt. Also erhält man im Ganzen 4 Paare von Kreisen, entsprechend den 4 Aehnlichkeitsaxen.

## § 108.\*

## Uebungen.

1) Es ist ein Kreis  $C$  gegeben. Man soll einen Kreis  $C'$  zeichnen, so dass die beiden Kreise einen gegebenen Punkt zum Aehnlichkeitspunkt haben und ausserdem

$\alpha$ ) zwei gegebene Punkte eines Aehnlichkeitsstrahles sich in den ähnlichen Systemen beider Kreise entsprechen,

$\beta$ ) zwei gegebene parallele Geraden sich in den ähnlichen Systemen beider Kreise entsprechen,

$\gamma$ ) der Radius des Kreises  $C'$  eine gegebene Länge habe,

$\delta$ ) der Mittelpunkt von  $C'$  auf einer gegebenen Geraden liege.

2) Man soll einen Kreis  $C'$  zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis  $C$  berührt, so dass

$\alpha$ ) zwei gegebene Punkte in den ähnlichen Systemen beider Kreise sich entsprechen,



$\beta$ ) zwei gegebene Gerade in dem System des einen Kreises zweien parallelen Geraden im System des andern Kreises entsprechen. (Je zwei Auflösungen.)

3) Wenn einer von zwei Kreisen zu einem Punkt zusammenschrumpft, so fallen die beiden Aehnlichkeitspunkte in diesem Punkte zusammen.

4) Wenn einer von zwei Kreisen unendlich gross wird und dadurch die Form einer Geraden annimmt, so fallen die Aehnlichkeitspunkte in die Endpunkte des zu dieser Geraden senkrechten Durchmessers in dem eigentlichen Kreise.

5) Aus einem Punkte einer gegebenen Geraden einen Kreis zu beschreiben, welcher eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt. (4 Auflösungen. Vergl. die Auflösung von § 103 b.)

6) Zwei Schnittkreise, welche gleiche Radien haben, bestimmen zu beiden Seiten der Centralen zwei Spitzbogen. Man soll in einem solchen Spitzbogen einen Kreis beschreiben, welcher die Grundlinie und die Seiten des Spitzbogens berührt.

Andeutung: Der Mittelpunkt der Grundlinie ist Berührungspunkt. Benütze § 103 a.

7) Einen Kreis zu zeichnen, welcher die Radien und den Bogen eines Kreisausschnitts berührt (§ 103 b).

8) In einen Spitzbogen zwei Kreise einzuzichnen, von welchen jeder die Grundlinie, die Höhe und die eine Seite berührt (§ 103 b).

9) In einen Kreis 4 Kreise zu zeichnen, welche den gegebenen Kreis und zwei auf einander senkrechte Durchmesser berühren (§ 103 b).

10) Wenn man von einem Punkte der Potenzlinie zweier Kreise Tangenten an die letzteren zieht, so sind die Berührungspunkte für den innern oder äussern Aehnlichkeitspunkt invers.

11) Wenn zwei Kreise  $C$  und  $C'$  von einem dritten rechtwinklig geschnitten werden, so sind die Schnittpunkte paarweise invers.

12) Wenn zwei Kreise  $C$  und  $C'$  von einem dritten rechtwinklig geschnitten werden, so sind die Schnittpunkte Ecken eines vollständigen Vierecks, in welchem zwei Nebenecken mit den Aehnlichkeitspunkten von  $C$  und  $C'$  zusammenfallen, während das dritte Nebeneck auf der Potenzlinie dieser Kreise gelegen ist.

13) Wenn die Ecken  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_6$  eines Sechsecks auf einem Kreise liegen, so liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden. (Satz von Pascal.)

Andeutung. Lege durch die gegenüberliegenden Ecken  $p_1$  und  $p_4$  einen Kreis  $a$ , durch  $p_2$  und  $p_5$  einen Kreis  $b$  und durch  $p_3$  und  $p_6$  einen Kreis  $c$ , so dass der gegebene Kreis von  $a, b, c$  rechtwinklig geschnitten wird. Der Schnittpunkt von  $p_1p_2$  und  $p_4p_5$  ist dann ein Aehnlichkeitspunkt von  $a$  und  $b$  u. s. w. Man findet, dass die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Aehnlichkeitsaxe der Kreise  $a, b, c$  liegen.

14) Wenn die Seiten eines Sechsecks Tangenten eines Kreises sind, so gehen die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt. (Satz von Brianchon.)

Andeutung. Die 6 Berührungspunkte bilden ein Pascal'sches



Sechseck (13). Die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten in diesem und die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in dem gegebenen Sechseck sind einander paarweise als Pol und Polare zugeordnet. Die Behauptung folgt also aus 13 und § 98 a.

15) Wenn man in den Schnittpunkten zweier Kreise mit einem äussern Aehnlichkeitsstrahl derselben Tangenten an die Kreise zieht, so bilden sie ein Parallelogramm. Zwei Ecken desselben liegen auf der Potenzlinie und die übrigen auf den Polaren des äussern Aehnlichkeitspunktes in Bezug auf jeden der Kreise.

16) Ein Kreis  $C$  wird von zwei Kreisen  $K$  und  $K'$  von aussen berührt. Man soll einen Kreis  $C'$  zeichnen, welcher alle 3 Kreise berührt. (2 Auflösungen.)

Andeutung. Die gemeinschaftliche Tangente von  $C$  und  $C'$  ist ein äusserer Aehnlichkeitsstrahl von  $K$  und  $K'$ .

17) Ein Kreis  $C$  wird von zwei Kreisen  $K$  und  $K'$  von innen berührt. Man soll einen Kreis zeichnen, welcher alle drei Kreise berührt. (2 Auflösungen.)

18) Ein Kreis  $C$  wird von einer Geraden  $K$  und einem Kreise  $K'$  von aussen berührt. Man soll einen Kreis  $C'$  construiren, welcher  $C$ ,  $K$  und  $K'$  berührt. (2 Auflösungen.)

Andeutung. Die gemeinschaftliche Tangente von  $C$  und  $C'$  muss durch einen der Aehnlichkeitspunkte des Kreises  $K'$  und der Geraden  $K$  gehen (4).

19) In einem Kreise  $K$  ist durch eine Gerade  $K'$  ein Abschnitt bestimmt. Ueber der Höhe dieses Abschnitts als Durchmesser ist ein Kreis  $C$  beschrieben. Man soll einen Kreis  $C'$  zeichnen, welcher  $K$ ,  $K'$  und  $C$  berührt. (Vergl. 17. — 2 Auflösungen.)

20) Einen Kreis zu zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis  $C$  berührt, durch einen gegebenen Punkt  $C'$  geht und eine gegebene Gerade  $A$  berührt. (§ 107 a, § 108 3, § 93 1. — 4 Auflösungen.)

21) Einen Kreis zu zeichnen, welcher zwei gegebene Kreise  $C^1$  und  $C^2$  berührt und ausserdem durch einen gegebenen Punkt  $C^3$  geht (§ 107 b, § 108 8 § 93 1. — 4 Auflösungen.)

22) Aus einem Punkte einer gegebenen Geraden einen Kreis zu zeichnen, welcher 2 gegebene Kreise  $C$  und  $C$  berührt. (§ 106 b, § 108 2  $\beta$ . — 4 Auflösungen.)

---



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Soeben ist erschienen und in allen Buchhandlungen zu haben:

Methodisch geordnete  
**Aufgabensammlung**

mehr als 8000 Aufgaben enthaltend

über alle Theile der

**Elementar-Arithmetik**

für Gymnasien, Realschulen und polytechnische Lehranstalten.

Von

**C. Barden.**

Vierte, durch Einführung der neuen Maaße und Münzen veränderte  
Doppel-Auflage.

8. geh. Preis 2 Mk. 70 Pf.

Selten wol hat ein Schulbuch so schnell allgemeine Verbreitung gefunden als die vorliegende Aufgabensammlung, von welcher in drei Jahren über 11000 Exemplare abgesetzt wurden.

Diese Aufgabensammlung enthält vierzig Abschnitte, beginnt mit Vorübungen und einer Einführung in die Buchstabenrechnung und endigt mit den Gleichungen des vierten Grades und der Auflösung der Gleichungen durch Näherung. Sie ist dazu bestimmt, in den Händen der Schüler zu sein und beim Unterricht zu Grunde zu liegen.

Die Zahl der Aufgaben sowol schwieriger als auch leichter und einfacher Art ist so groß, daß sie nicht nur für die fähigsten Schüler ausreichen wird, sondern daß mit ihrer Hilfe auch die schwächeren Schüler zur vollständigen Klarheit der vorgetragenen Sätze, zur Geläufigkeit in der Anwendung derselben und zur Fertigkeit im Lösen der betreffenden Aufgaben gebracht werden können.

Um das Interesse der Schüler rege zu erhalten und sie zu befähigen, die Rechnung auf recht verschiedenartige Verhältnisse anzuwenden, ist eine möglichst große Mannigfaltigkeit der Aufgaben angestrebt und auf eine stufenmäßige Reihenfolge derselben alle Sorgfalt verwendet worden.

Die Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten und ihre Anwendungen sind als der wichtigste und interessanteste Theil der Arithmetik in so umfassender Weise bearbeitet, wie es bis jetzt schwerlich in einer Aufgabensammlung oder in einem Lehrbuche geschehen ist.



Ordnung und Uebersichtlichkeit der Darstellung machen das Buch ganz besonders empfehlenswerth. Der Schüler wird sich leicht orientiren und es nicht ungern in die Hand nehmen.

Während schon bei der zweiten Auflage als wesentlich neuer Bestandtheil Aufgaben über den binomischen Satz hinzugekommen sind und außerdem in den übrigen Abschnitten die Aufgaben noch wesentlich vermehrt wurden, sind in dieser vierten Auflage noch manche Veränderungen vorgenommen und ist das Material um volle 16 Seiten vermehrt worden, so daß das Buch jetzt mehr als 8000 Aufgaben enthält.

In dieser vierten Auflage sind die neuen Maße und Münzen eingeführt. Der Thaler findet sich nur noch in einigen Aufgaben. Die süddeutschen Gulden zu 60 Kreuzer kommen nicht mehr vor, nur österreichische Gulden zu 100 Kreuzer.

Die Abschnitte über Zerlegung in Faktoren und Heben der Brüche sind in einen Abschnitt (VIII) zusammengezogen. Abschnitt X über Proportionen ist neu hinzugekommen. Der Abschnitt über Gaußsche Logarithmen ist gestrichen. Die Veränderung der Nummern der Abschnitte giebt das Inhaltsverzeichnis. Bei jedem Abschnitt steht die frühere Nummer, wenn diese eine andere ist, in Klammern daneben. Dasselbe findet statt bei den Aufgaben, welche jetzt eine andere Nummer erhalten haben.

In II, IV und VII sind einige Aufgaben über neue Maße und Münzen hinzugefügt, damit die Schüler sich an dieselben gewöhnen und einsehen, wie leicht sich manche früher unangenehme Aufgabe jetzt ausführen läßt: II, 48 und 49; VI, 153—158; VII, 89—102. — XI (Potenzen) ist um etwa 60 Aufgaben (165—174) über Zerlegung in Faktoren, Heben der Brüche und Addition der Brüche vermehrt. — Von den eingekleideten Aufgaben in XXII, XXIV, XXIX—XXX sind einige Aufgaben wegen der veränderten Einwohnerzahl der Städte, einige auch wegen der Reichsmünze geändert. — XXV Nr. 142<sub>1</sub>—142<sub>2</sub> standen früher in der dritten Stufe, Nr. 37—50 S. 204 in der zweiten Stufe. — In dem kleinen Abschnitt über Maxima und Minima sind zwei andere Methoden und 40 Aufgaben hinzugefügt (134—148). — XXXIII (Zinseszinsrechnung) ist um die Hälfte der Aufgaben vermehrt, alle mit dem Index sind neu; geändert sind 3—6, 10—13, 18, 19, 26, 40—42 und 49. — XXXV (Wahrscheinlichkeitsrechnung) ist ganz umgearbeitet.

Außer diesen größeren Veränderungen und einigen zerstreuten, mit einem Strich bezeichneten Aufgaben sind noch, um den Gebrauch der neuen Auflage neben den früheren zu erleichtern, als neu oder geändert zu notiren: S. 28, 87 u. 88; S. 33, 9—20, 27—31<sub>1</sub>; S. 34, 51—55<sub>1</sub>; S. 44, 100—103; 49, 196<sub>1</sub> u. 198<sub>1</sub>; S. 59, 38<sub>1</sub>—38<sub>5</sub>; S. 62, 39<sub>1</sub>—39<sub>7</sub>; S. 63, 83<sub>5</sub>—83<sub>10</sub>; S. 65, 18<sub>1</sub>—18<sub>7</sub>; S. 67, 21<sub>1</sub>—21<sub>4</sub>; S. 82, 71—75; S. 90, 74<sub>3</sub>—74<sub>4</sub>; 79—82; S. 91, 98—101; S. 216, 106<sub>1</sub>—106<sub>7</sub>; S. 266, 48d—52.

Trotz der wesentlichen Veränderungen, welche das Buch in dieser neuen Auflage erfahren hat, wird zwar neben denselben der Gebrauch der früheren Auflage nicht unthunlich sein, die Verlagshandlung ist aber doch gern bereit, sowohl den Lehrern, welche das Buch schon eingeführt haben, als auch denjenigen, welche es noch einführen wollen, ein Freiemplar der neuen Auflage zu liefern. Nur bitte ich, sich deshalb direkt an mich zu wenden, oder eine schriftliche Notiz einer Buchhandlung zur Uebermittlung an mich zu übergeben. Dagegen bin ich nicht in der Lage, das ebenfalls neu gedruckte Heft, welches die Resultate enthält, gratis liefern zu können, da dasselbe nur an Lehrer abgegeben wird, ein anderweitiger Absatz, durch welchen die bedeutenden Herstellungskosten gedeckt werden könnten, also nicht stattfindet. Das Resultatheft wird jedem Lehrer, der sich unter Einsendung von 1 Mark in Briefmarken direkt an mich wendet, direkt zur Post franko übersandt.

Leipzig, im Februar 1875.

B. G. Teubner.



Müller, Hubert,

Leitfaden der ebenen Geometrie, mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule bearbeitet von Hubert Müller In zwei Theilen

Bd.: 1

Leipzig 1874

Math.p. 364 f-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11187562-1